

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

数学分析

（第二册）

伍胜健　编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书



ISBN 978-7-301-15876-0

9 787301 158760 >

定价：18.00元

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

数学分析

(第二册)

伍胜健 编著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析·第二册/伍胜健编著. —北京: 北京大学出版社, 2010. 2
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 978-7-301-15876-0
Ⅰ. 数… Ⅱ. 伍… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 171115 号

书　　名：数学分析(第二册)
著名责任者：伍胜健　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-15876-0/O·0798
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5 开本　9.75 印张　255 千字
2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：18.00 元

内 容 简 介

本书是综合性大学和高等师范院校数学系本科生数学分析课程的教材. 全书共分三册. 第一册共六章, 内容为函数、序列的极限、函数的极限与连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分; 第二册共六章, 内容为定积分、广义积分、数项级数、函数序列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数; 第三册共五章, 内容为n维欧氏空间与多元函数的极限和连续、多元函数微分学、重积分与广义重积分、曲线积分与曲面积分及场论、含参变量的积分。本书每章配有适量习题, 书末附有习题答案或提示, 供读者参考.

作者多年来在北京大学为本科生讲授数学分析课程, 按照教学大纲, 精心选取教学内容并对课程体系优化整合, 经过几届学生的教学实践, 收到了良好的教学效果. 本书注重基础知识的讲述和基本能力的训练, 按照认知规律, 以几何直观、物理背景作为引入数学概念的切入点, 对内容讲解简明、透彻, 做到重点突出、难点分散, 便于学生理解与掌握.

本书可作为高等院校数学院系、应用数学系本科生的教材, 对青年教师本书也是一部很好的教学参考书. 为了帮助读者学习, 本书配有学习辅导书《数学分析解题指南》(材源渠、方企勤编. 书号: ISBN 978-7-301-06550-1; 定价 24.00 元)供读者参考.

作 者 简 介

伍胜健 北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 1992 年在中国科学院数学研究所获博士学位. 主要研究方向是复分析. 在北京大学长期讲授数学分析、复变函数、复分析等课程.

目　录

第七章　定　积　分

§7.1　定积分的概念与微积分基本定理

7.1.1　曲边梯形的面积

定积分最朴素的思想可以追溯到阿基米德时代, 阿基米德的"由直线组成平面图形, 由平面组成立体图形"的思想可以认为是定积分的萌芽. 他曾借助圆柱和圆锥的体积并利用细分的方法求出了球的体积. 但由于用细分的方法无法解决一般函数的定积分计算问题, 因此定积分的研究在漫长的岁月里一直没有进展. 直到 17 世纪, 在天文学和物理学等学科的促进下, 数学研究才取得了很大的进展. 伽利略和开普勒的一系列发现, 如开普勒的行星运动三定律等, 导致了导数的诞生. 导数对现代数学理论的建立起了巨大的促进作用. 到了 17 世纪下半叶, 牛顿和莱布尼茨两人在综合、发展前人工作的基础上, 几乎同时建立了微积分理论. 正是这种理论, 使得定积分有了简便的计算方法, 从而也使得它具有极大的理论和实用价值.

可以引入定积分概念的问题很多, 如开普勒研究的椭圆面积问题; 已知速度求路程的问题; 已知密度求质量的问题; 等等. 下面我们以求由区间 $[a,b]$ 上非负函数 $f(x)$ 的图像 (曲线) 与 x 轴及直线 $x=a, x=b$ 所围图形 S (如图 7.1.1, 我们称该图形为**曲边梯形**) 的面积为例来详细阐述定积分的基本思想.

回忆一下, 我们目前所能精确求出面积的图形只能是由有限条线段所围成的平面图形. 如果 $y=f(x)$ 不是一个线性函数, 则不可能简单地用某个我们已知的计算公式算出该曲边梯形的面积. 因此我们需要探究如何来求这种图形面积的方法.

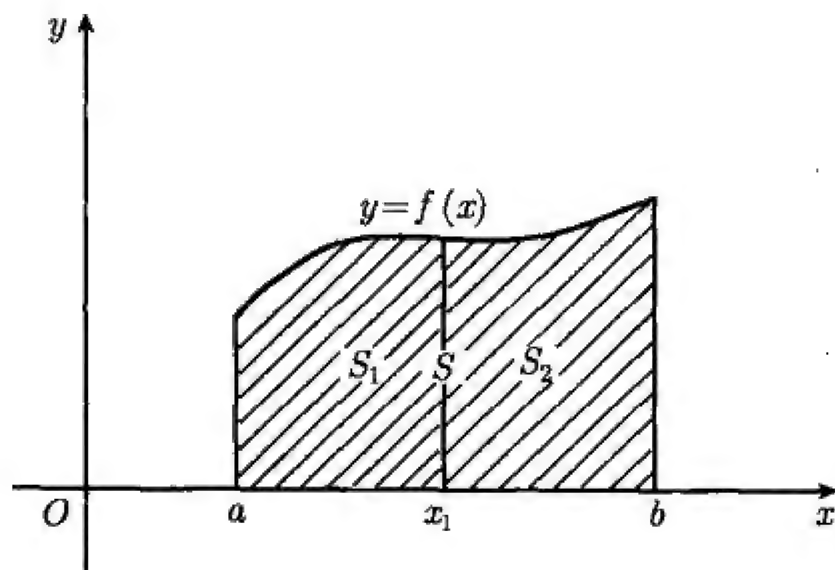


图 7.1.1

为了使问题简化, 我们假定 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并记 M,m 分别为它在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值. 在重积分理论中, 我们将讨论一般的平面图形的面积问题并证明曲边梯形 S 的面积必定存在. 现在我们假定该曲边梯形的面积存在并将其面积仍记为 S, 易于看出

$$m(b-a)\leqslant S\leqslant M(b-a).$$

设函数 $y=f(x)\,(x\in[a,b])$ 的图像为 T. 由连续函数的性质可以知道 T 上必有一点 $(c,f(c))$, 使得 $S=f(c)(b-a)$. 我们事先无法知道 c 在何处, 能做的是在区间 $[a,b]$ 上取一点 ξ, 计算 $f(\xi)(b-a)$.

$f(\xi)(b-a)$ 的几何意义很明显, 它是以区间 $[a,b]$ 为底, 以 $f(\xi)$ 为高的矩形的面积. 它与 S 的误差可以由下式估计:

$$|S-f(\xi)(b-a)|=|f(c)-f(\xi)|(b-a)\leqslant(M-m)(b-a),$$

其中 $M-m$ 也称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**振幅**.

如果我们等分区间 $[a,b]$ 成两个小区间, 并令 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ (见图 7.1.1), 则直线 $x=x_1$ 将 S 分成两个曲边梯形 S_1 及 S_2. 现将它们的面积仍然分别记为 S_1 和 S_2, 显然有

$$S=S_1+S_2.$$

在 S_1 和 S_2 中重复我们刚才在区间 $[a,b]$ 上所做的过程, 记 M_1, M_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $[a,x_1]$ 和 $[x_1,b]$ 上的最大值, m_1, m_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $[a,x_1]$ 和 $[x_1,b]$ 上的最小值. 在区间 $[a,x_1]$ 上任意取 ξ_1, 在区间 $[x_1,b]$ 上任意取 ξ_2, 则有以下的估计式:

$$|f(\xi_1)(x_1-a)-S_1| \leqslant (M_1-m_1)\frac{b-a}{2},$$
$$|f(\xi_2)(b-x_1)-S_2| \leqslant (M_2-m_2)\frac{b-a}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}&|f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(b-x_1)-S|\\ &\quad\leqslant [(M_1-m_1)+(M_2-m_2)]\frac{b-a}{2}\\ &\quad\leqslant (M-m)(b-a).\end{aligned}$$

上式成立是因为分割后的误差估计由小区间上的振幅给出, 而一个函数在小区间上的振幅不会比在包含该区间的大区间上的振幅大的缘故. 上式还告诉我们: 对于分成两块所得到的和式 $f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(b-x_1)$ 与 S 的误差和原来 $f(\xi)(b-a)$ 与 S 的误差, 分割后的误差的估计式不会变大. 在许多情况下, 比如 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单调, 分割后任意取值得到的和式与 S 的误差估计比分割前的误差估计会变得更小.

当区间 $[a,b]$ 分割后的区间长度很小时, 由 $f(x)$ 的一致连续性, $f(x)$ 在每个小区间上的振幅都可以很小. 基于这种思想, 我们将区间 $[a,b]$ 分割成更小的区间, 如对充分大的 n, 将区间 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间 (见图 7.1.2). 设其分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的最大值为 M_i, 最小值为 m_i. 在每个区间上任取 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

则此和式与 S 的误差可以有下面的估计：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - S\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{7.1.1}$$

上述不等式右边即为图 7.1.2 中与曲线相交的小矩形面积之和. 由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 从而一致连续, 因此对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当每个 $x_i - x_{i-1} < \delta$ 时 (这只要 n 充分大即可), 有 $M_i - m_i < \varepsilon$. 于是我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - S\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b-a).$$

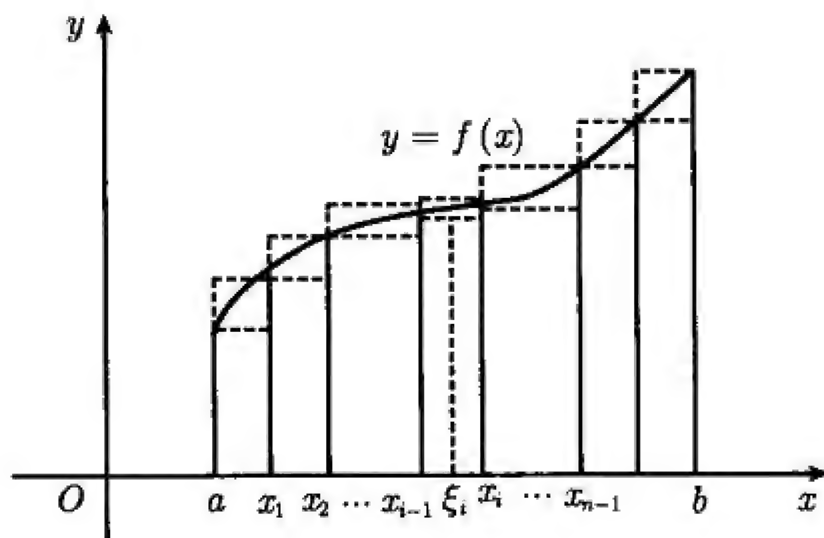


图　7.1.2

以上分析告诉我们, 只要 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 当区间 $[a,b]$ 分割得充分 "细" 时, 对每个小曲边梯形的曲边 "以直代曲", 作出的和式的值可以任意地接近该曲边梯形的面积. 因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S.$$

下面我们以由曲线 $f(x) = x^2 (x \in [0,1])$ 与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围的图形为例来求其面积 S (见图 7.1.3).

将区间 $[0,1]$ 进行 n 等分, 其分点为 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$. 在区

间 $\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

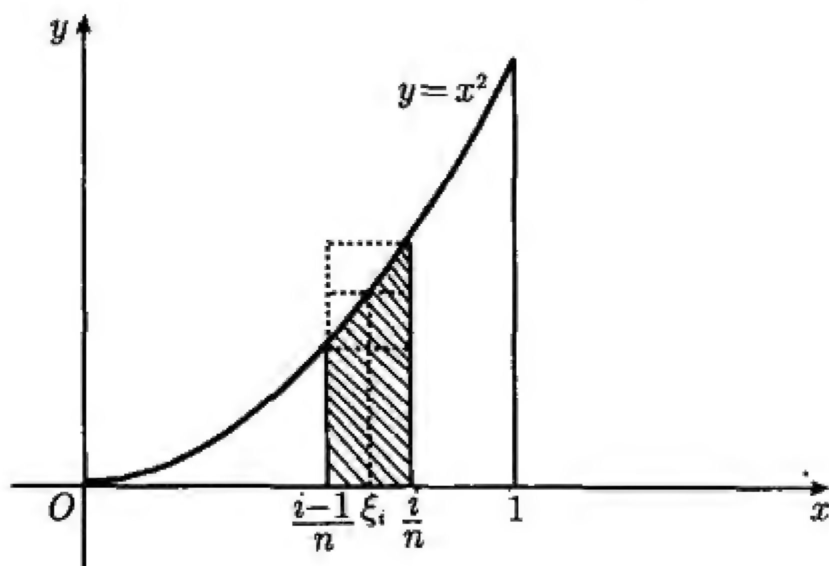


图 7.1.3

由于 $\dfrac{i-1}{n}\leqslant\xi_i\leqslant\dfrac{i}{n}\,(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 单调上升, 因此有

$$m_i=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\leqslant\xi_i^2\leqslant\left(\frac{i}{n}\right)^2=M_i.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3},$$

我们有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-S\right|\leqslant\left|\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right|\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此有

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=\frac{1}{3}.$$

我们再来举一个质点做直线运动的例子. 假定一个质点在直线上朝着一个方向运动, 其速度 $v=v(t)$ 是时间 t 的函数. 为简便计, 假定 $v(t)\geqslant 0$. 现在我们来求在时间段 $[a,b]$ 内质点走过的路程 s.

若 $v(t)=c$ 是常数函数, 则 $s=c(b-a)$. 如果 $v(t)$ 不是常数函数, 即质点做非匀速运动时, 我们如何来求 s 呢? 为此我们来分析一下, 假定 $v(t)$ 是连续变化的 (在许多实际问题中大都是如此), 则对任意 $t_0\in[a,b]$, $v(t)$ 在 t_0 附近的值与 $v(t_0)$ 很接近. 换句话说, 对很小的 $\delta>0$, 在时间段 $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ 内, 质点走过的路程 $\tilde{s}\approx 2\delta v(t_0)$ (简称 "以不变代变"). 这就启发我们将区间 $[a,b]$ 作分割: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{t_i-t_{i-1}\}$ 很小时, 在每个时间段 $[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$ 内质点走过的路程 $s_i\approx v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$, 其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$. 因此, 总的路程

$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)(t_i-t_{i-1}).\tag{7.1.2}$$

当时间段 $[a,b]$ 的分割对应的小时间段的长度趋于零时, 上面路程的近似值与路程的准确值无限地接近. 因此若和式 (7.1.2) 有极限, 此极限便是我们要求的路程. 容易看出以上已知速度函数求路程与我们在前面求曲边梯形的面积具有相同的"纯数学"极限过程.

7.1.2　定积分的定义

上面我们对若干问题进行了讨论, 在自然界还有许多类似的问题, 在解决它们的过程中可以抽象出一个相同的 "纯数学" 极限过程. 为此我们给出下面的定义.

定义 7.1.1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 对于区间 $[a,b]$ 的一个分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时, 上述和式存在极限 I, 且 I 不依赖分割 Δ 的选取及 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的选取, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$

上是**黎曼可积**(简称**可积**)的, 同时称 I 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a 与 b 分别称为定积分的**下限**和**上限**, $f(x)$ 称为**被积函数**, x 称为**积分变量**.

在定积分理论的讨论中, 我们经常要遇到分割求和. 为了使行文简洁, 在今后对每个给定的区间 $[a,b]$, 我们总是用 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 来表示它的一个分割, 对于这个分割总是记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 并且记 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_i, 我们称和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 $f(x)$ 关于 Δ 的**黎曼和**.

用 "ε-δ" 语言叙述定积分的定义则更为精确.

定义 7.1.1′ 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 若存在常数 $I\in\mathbb{R}$, 使得对于 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 对区间 $[a,b]$ 的任何一个分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时, 在每个 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取 ξ_i, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 是黎曼可积的, 并称 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

今后, 我们用记号 $f(x)\in R[a,b]$表示函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

从定义 7.1.1(或定义 7.1.1′) 可以看出: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则它在区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一种特殊和式的极限. 因此, 和式写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta t_i$ 并不影响和式的极限, 此和式是由函数关系 f 决定的, 与自变量取 x 还是取 t 无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

值得注意的是，上述和式的极限与我们所学过的序列极限和函数极限是不同的. 在 $\lambda(\Delta) \to 0$ 的过程中，这个极限过程具有两个任意性，即分割的任意性及在每个小区间上 ξ_i 选取的任意性. 尽管这些极限过程有所不同，但定积分定义中和式的极限与序列极限或函数极限仍具有一些相似的性质，如一个函数的定积分存在，则它必定唯一. 这些性质的证明可以由定义直接推出，读者可自证之.

7.1.3　定积分的几何意义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 我们先看 $f(x) \geqslant 0$ 的情形. 根据我们前面的讨论可知：定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积 S.

当 $f(x) \leqslant 0$ 时，同样地设由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积为 S，则此时 $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

当 $f(x)$有正有负时，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是由直线 $x=a, x=b, y=0$ 与 $y=f(x)$ 所围成的几个曲边梯形中，位于 x 轴上方的各个曲边梯形面积之和减去位于 x 轴下方的各个曲边梯形面积之和. 如图 7.1.4，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

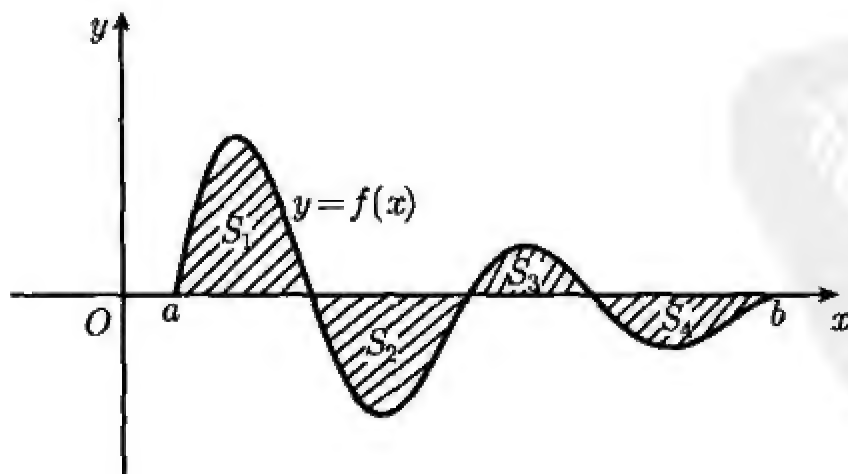


图　7.1.4

7.1.4 连续函数的可积性

在对曲边梯形面积的讨论中，如果假定该面积存在，我们找到了一种求出该面积的方法. 有了这一基础，对一个连续函数 $y = f(x), x \in [a,b]$，我们比较容易证明它在区间 $[a,b]$ 上必定是可积的.

定理 7.1.1 设函数 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x) \in R[a,b]$.

证明 记 m, M 分别为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小和最大值. 我们注意到，对区间 $[a,b]$ 的任意分割 Δ，$f(x)$ 关于 Δ 的任一黎曼和满足

$$m(b-a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leqslant M(b-a), \quad (7.1.3)$$

其中 m_i 与 M_i 分别为 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ 上的最小值和最大值. 特别地，对每一个 $n \in \mathbb{N}$，将区间 $[a,b]$ 的 n 等分的分割记为 Δ_n，在此分割的每个小区间 $[x_{j-1}, x_j](j = 1, 2, \cdots, n)$ 上取定 $\xi_j = x_j$，我们可得一个特殊的黎曼和

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{b-a}{n}.$$

这样一来，我们便得到了一个序列 $\{S_n\}$，由 (7.1.3) 知它是一个有界序列，因此存在收敛子列 $\{S_{n_k}\} \subset \{S_n\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$，下面我们证明 S 即为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

对于 $\forall \varepsilon > 0$，由函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致连续知，$\exists \delta > 0$，当 $x', x'' \in [a,b]$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时，有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

从而对任意的分割 Δ，当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$，因此存在 $K > 0$，使得当 $n_k > K$ 时，有 $\lambda(\Delta_{n_k}) < \delta$

和 $|S_{n_k} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ 同时成立. 现取定一个 $n_{k_0} > K$, 使得它同时满足这两个条件, 即 $\lambda(\Delta_{n_{k_0}}) < \delta$ 和 $|S_{n_{k_0}} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$.

对于任意的分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时, 我们有以下的估计:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - S\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - S_{n_{k_0}}\right| + |S_{n_{k_0}} - S| \\ &< \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=1}^{n_{k_0}} f(x_j)\frac{b-a}{n_{k_0}}\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7.1.4)\end{aligned}$$

为了估计上述不等式右边两个黎曼和的差, 记 Δ' 为 Δ 与 $\Delta_{n_{k_0}}$ 的分点集的并所构成的区间 $[a,b]$ 的分割, 显然有 $\lambda(\Delta') < \delta$. 容易看出对关于 Δ', Δ , $\Delta_{n_{k_0}}$ 的任意黎曼和, 有下述估计:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)\Delta x'_k\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}$$

和

$$\left|\sum_{j=1}^{n_{k_0}} f(x_j)\frac{b-a}{n_{k_0}} - \sum_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)\Delta x'_k\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n_{k_0}}(M'_j - m'_j)\frac{b-a}{n_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{4},$$

其中 $\sum\limits_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)\Delta x'_k$ 是关于 Δ' 的任意一个黎曼和, $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$ 是关于分割 Δ 求和, $\sum\limits_{j=1}^{n_{k_0}}(M'_j - m'_j)\frac{b-a}{n_{k_0}}$ 是关于分割 $\Delta_{n_{k_0}}$ 求和. 因此

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=1}^{n_{k_0}} f(x_j)\frac{b-a}{n_{k_0}}\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)\Delta x'_k\right| \\ &\quad + \left|\sum_{j=1}^{n_{k_0}} f(x_j)\frac{b-a}{n_{k_0}} - \sum_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)\Delta x'_k\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

将此估计代入 (7.1.4) 式即得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - S\right| < \varepsilon.$$

这就证明了函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 并且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S$. 证毕.

7.1.5 微积分基本定理

从定积分的定义可知, 定积分应在许多问题中有重要应用, 因此如何计算一个函数的定积分是一个十分关键的问题. 如果对每个函数都要从定积分的定义出发, 对区间分割, 在分割后的每个小区间任取一点作和式, 再求极限, 当函数稍微复杂一点, 求定积分的值就会面临巨大的困难. 如果没有一种相对简单的定积分计算方法, 定积分或许不会成为一种有用的理论和工具.

如何发现定积分简便的计算方法呢? 我们可以先考查一下以下具体问题. 假定我们已知一个质点做直线运动, 其速度函数为 $v(t) > 0(t \in [t_0, t_1])$, 现在来求它在该时间段内走过的路程. 前面我们已经知道, 若速度函数 $v(t)$ 的性质比较好 (如 $v(t)$ 是连续的), $v(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上的定积分 $\int_{t_0}^{t_1} v(t)\mathrm{d}t$ 刚好是质点在该时间段内走过的路程. 从另外一方面来看, 该段路程刚好是路程函数 $s(t)$ 在 $t = t_1$ 和 $t = t_0$ 两点的值之差. 换句话说, 我们有

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\mathrm{d}t = s(t_1) - s(t_0).$$

在微分学理论中, 我们已经知道了 $s'(t) = v(t)$.

那么, 若一个函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且存在原函数 $F(x)$, 是否总是成立 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$呢? 这个问题已由牛顿和莱布尼茨解决. 因此人们称下面定理给出的计算定积分的公式为**牛顿–莱**

布尼茨公式. 由于它是微积分理论中最重要的结果, 人们也称它为微积分基本定理.

定理 7.1.2 (微积分基本定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 并且满足以下两个条件:

(1) 在区间 $[a,b]$ 上可积;

(2) 在区间 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$,

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \triangleq F(x)\Big|_a^b. \tag{7.1.5}$$

证明 首先, 由于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 任取区间 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

在 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ 上任取一点 ξ_i, 则有

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其次, 对于分割 Δ, 我们有

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

在 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ 上对 $F(x)$ 应用拉格朗日微分中值定理得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i')\Delta x_i,$$

其中 $\xi_i' \in (x_{i-1}, x_i)$. 因此我们有

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i')\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

证毕.

利用牛顿–莱布尼茨公式可以使许多定积分的计算变得十分简单. 例如前面我们利用分割、求和以及计算极限求出了 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. 由于 $f(x) = x^2 \in C[0,1]$, 由定理 7.1.1, 我们知 $f(x) = x^2 \in R[a,b]$. 在不定积分中, 我们知道 $F(x) = \frac{x^3}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 现利用牛顿–莱布尼茨公式即有

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 7.1.1 设 $I_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}(1+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha)$ $(\alpha > 0)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

解 由于

$$I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{2^\alpha}{n^\alpha} + \frac{3^\alpha}{n^\alpha} + \cdots + \frac{n^\alpha}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^\alpha}{n^\alpha},$$

因此 I_n 可以看成是函数 x^α 在区间 $[0,1]$ 上关于分割

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1$$

的一个黎曼和. 由 x^α 在 $[0,1]$ 上连续, 知它在 $[0,1]$ 上可积. 在不定积分中, 我们已知 $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的一个原函数, 因此由牛顿–莱布尼茨公式得

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 x^\alpha\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

§7.2 可积性问题

我们已经指出, 在微积分的理论中, 微积分基本定理是最重要的定理. 从该定理可以看出, 在定积分理论中我们要解决的两个基本问题是:

(1) 函数的可积性;

(2) 原函数的存在性.

在以下各节中, 我们将逐步展开来讨论这两个问题. 在本节中, 我们将讨论函数的可积性问题. 尽管我们已经证明了连续函数的可积性, 但在许多数学理论中我们还需要讨论更为广泛的可积函数类. 事实上, 正是在研究更为广泛的函数的可积性时, 人们创造了新的积分理论 —— 勒贝格 (Lebesgue) 积分理论. 关于这类积分, 我们将在实变函数论这门课程中加以仔细讨论.

要解决满足什么样条件的函数是可积的这个基本的问题, 我们必须从定积分的定义着手. 在定积分的定义中, 分割是任意的, 对于给定的分割, 在每个小区间上取值也是任意的. 因此, 在函数的可积性的研究中, 我们自然有以下两个问题: 在定积分的定义中,

(a) 是否可取特殊的分割来代替任意的分割?

(b) 能否通过特殊的取值来作和式?

通过本节的讨论, 我们将回答这两个问题.

7.2.1　可积的必要条件

首先我们观察到, 如果一个函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无界, 则对于任意的分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

必存在 $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, 使得 $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 上无界. 对每个 i ($1 \leqslant i \leqslant n$ 且 $i \neq i_0$), 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取定 ξ_i, 作和式

$$\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

则上述和式在 ξ_i 取定后是一个定数. 记

$$M_1 = \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

对任意的 $M>0$, 由于 $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上无界, 因此在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上可取 ξ_{i_0}, 使得

$$|f(\xi_{i_0})|>\frac{M+|M_1|}{\Delta x_{i_0}},$$

从而有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|&=\left|\sum_{i=1,i\neq i_0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}\right|\\&\geqslant|f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0}-|M_1|\\&>M.\end{aligned}$$

由于 M 是任意给定的正数, 因此当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能有极限. 所以我们证明了下面的定理.

定理 7.2.1 若函数 $f(x)\in R[a,b]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界.

在下面的可积性讨论中, 我们总是假定函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 一个自然的问题是: 有界函数是否一定可积呢? 此答案是否定的, 如下例所示.

例 7.2.1 证明狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

在任何区间 $[a,b]$ 上不可积.

证明 对区间 $[a,b]$ 的任意分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 如果在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上取一点 $\xi_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 且 ξ_i 为有理数, 则

$$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=1;$$

若取 ξ_i 为无理数, 则

$$\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0.$$

因此, 当 $\lambda(\Delta) \to 0$ 时, $\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能存在极限. 这说明 $D(x) \notin R[a,b]$.

例 7.2.1 实际上回答了我们在本节开始时提出的关于可积性的第二个问题 (问题 (b)), 即在定积分的定义中, 我们不能通过取特殊值的黎曼和来确定函数的可积性.

7.2.2　达布理论

关于可积性的讨论有点类似于序列或函数的上、下极限的讨论. 对区间 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 和 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 由于 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i](i = 1,2,\cdots,n)$ 上取值的任意性, 使得其黎曼和具有一定的任意性. 我们注意到: 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 由定积分的定义可知, 在小区间上任意取值的黎曼和当 $\lambda(\Delta) \to 0$ 时有极限, 那么, 对 $\lambda(\Delta)$ 很小时的每个分割 Δ, 所有可能的黎曼和的上确界和下确界必相差不大. 显然 $f(x)$ 在每个小区间上的上确界和下确界只与分割 Δ 有关, 而与 ξ_i 的取法无关. 为此, 对于分割 Δ 及 $i = 1,2,\cdots,n$, 令

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}.$$

我们作如下的和式:

$$\overline{S}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad \underline{S}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

$\overline{S}(\Delta)$, $\underline{S}(\Delta)$ 分别称为 $f(x)$ 关于分割 Δ 的**达布** (Darboux)**大和与达布小和**.

由于达布大和与达布小和仅仅依赖分割的选取, 对达布大和与达布小和的研究可以避免因 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i](i = 1,2,\cdots,n)$ 上取值的任意性而使得其黎曼和产生任意性. 如果记 $S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为 $f(x)$ 关于分割 Δ 的任意一个黎曼和, 则显然有

$$\underline{S}(\Delta) \leqslant S(\Delta) \leqslant \overline{S}(\Delta).$$

另外不难看出, 当 $f(x) \in C[a,b]$ 时, $\underline{S}(\Delta), \overline{S}(\Delta)$ 均是黎曼和.

下面我们来研究达布大和与达布小和的一些性质. 若 Δ' 和 Δ'' 都是区间 $[a,b]$ 的分割, 并且 Δ' 中的分点均是 Δ'' 中的分点, 我们则称 Δ'' 是 Δ' 的**细分**, 记为 $\Delta' \subset \Delta''$.

以下我们总假定函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 涉及的分割均是 $[a,b]$ 的分割, 并且所有的黎曼和都是关于 $f(x)$ 的. 对一个给定的分割 Δ, 我们记 $\omega_i = M_i - m_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. ω_i 通常称为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$ 上的**振幅**. 不难证明

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} \left\{ |f(x') - f(x'')| \right\}.$$

达布大和与达布小和具有以下性质.

性质 7.2.2 设 Δ' 与 Δ'' 为区间 $[a\ b]$ 的两个分割, 若 $\Delta' \subset \Delta''$, 则有 $\overline{S}(\Delta') \geqslant \overline{S}(\Delta'')$ 和 $\underline{S}(\Delta') \leqslant \underline{S}(\Delta'')$, 即对于分割的细分, 达布大和不增, 达布小和不减.

证明 设

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

我们先假定

$$\Delta'' : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x' < x_i < \cdots < x_n = b,$$

即 Δ'' 只是在 Δ' 中加一个分点 x' 所成. 记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, \quad M_i' = \sup_{x \in [x_{i-1}, x']} \{f(x)\},$$
$$M_i'' = \sup_{x \in [x', x_i]} \{f(x)\},$$

则有 $M_i' \leqslant M_i$ 和 $M_i'' \leqslant M_i$, 因此有

$$\begin{aligned} &\overline{S}(\Delta') - \overline{S}(\Delta'') \\ &= M_i(x_i - x_{i-1}) - \left[M_i'(x' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x') \right] \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

对于 Δ' 中加入多个分点的情形可以比较逐个每次加入一个分点的分割的达布大和并利用上述证明的结论得到. 对于达布小和的情形可类似讨论. 证毕.

性质 7.2.3　设 Δ' 和 Δ'' 是区间 $[a,b]$ 的任意两个分割, 则有 $\underline{S}(\Delta') \leqslant \overline{S}(\Delta'')$, 即任意分割的达布小和不大于任意分割的达布大和.

证明　将 Δ', Δ'' 中的分点合并在一起构成区间 $[a,b]$ 的一个新的分割, 记其为 $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$. 由性质 7.2.2 得

$$\underline{S}(\Delta') \leqslant \underline{S}(\Delta) \leqslant \overline{S}(\Delta) \leqslant \overline{S}(\Delta'').$$

证毕.

现记

$$m = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \quad M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

则对任意的分割 Δ, 有

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(\Delta) \leqslant \overline{S}(\Delta) \leqslant M(b-a).$$

当分割越来越细时, 性质 7.2.2 告诉我们达布大和与达布小和在某种意义下具有单调性. 因此类似于单调序列极限的性质, 定义

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\Delta}\{\underline{S}(\Delta)\} \quad 和 \quad \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_{\Delta}\{\overline{S}(\Delta)\}.$$

我们分别称 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**下积分**和**上积分**.

定理 7.2.4 (达布定理)　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \overline{S}(\Delta) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \quad \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \underline{S}(\Delta) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　只证上积分情形, 关于下积分的证明留给读者.

对于 $\forall\varepsilon > 0$, 由上积分的定义, 存在一个分割 $\Delta_1 : a = x_0' < x_1' < \cdots < x_N' = b\,(N > 1)$, 使得下式成立:

$$0 \leqslant \overline{S}(\Delta_1) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对任意分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 由上积分的定义有

$$0 \leqslant \overline{S}(\Delta)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

我们记 $\Delta^*=\Delta\cup\Delta_1$, 并考查分割 Δ 中的每一个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$. 如果 (x_{i-1},x_i) 中无 Δ_1 中的分点, 则在 $\overline{S}(\Delta)$ 与 $\overline{S}(\Delta^*)$ 中的相应项同为 $M_i\Delta x_i$. 现在设 (x_{i-1},x_i) 中含有 Δ_1 中的分点. 记 δ_1 为 Δ_1 中 N 个小区间的最小长度, 若预先取 $\lambda(\Delta)<\delta_1$, 则在 (x_{i-1},x_i) 中只有 Δ_1 中的一个分点 x'. 因此 $\overline{S}(\Delta)$ 与 $\overline{S}(\Delta^*)$ 中相应项之差为

$$\begin{aligned}&M_i(x_i-x_{i-1})-[M_i'(x'-x_{i-1})+M_i''(x_i-x')]\\ &\leqslant (M-m)(x_i-x_{i-1})\leqslant (M-m)\lambda(\Delta),\end{aligned}$$

其中

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},$$

$$M_i'=\sup_{x\in[x_{i-1},x']}\{f(x)\},\quad M_i''=\sup_{x\in[x',x_i]}\{f(x)\};$$

$$m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\quad M=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

因此我们得到以下的估计:

$$0\leqslant \overline{S}(\Delta)-\overline{S}(\Delta^*)\leqslant (N-1)(M-m)\lambda(\Delta).$$

我们不妨设 $m<M$, 否则 $f(x)$ 为常数函数, 此时结论显然成立. 取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{2(N-1)(M-m)}\right\}$, 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}0\leqslant&\overline{S}(\Delta)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\\ =&[\overline{S}(\Delta)-\overline{S}(\Delta^*)]+[\overline{S}(\Delta^*)-\overline{S}(\Delta_1)]+\left[\overline{S}(\Delta_1)-\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\right]\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+0+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

注　如果用 "ε-δ" 语言来叙述定理 7.2.4, 则它的形式是: 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 对区间 $[a,b]$ 的任意分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时, 就有

$$0 \leqslant \overline{S}(\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{S}(\Delta) < \varepsilon.$$

在研究什么样的函数可积这一问题之前, 我们先来考查一下定理 7.2.4 的证明过程. 从该定理的证明中读者不难发现以下事实: 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 若我们能找到一个特别的分割 Δ_1, 使得

$$0 \leqslant \overline{S}(\Delta_1) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2},$$

则必定存在 $\delta > 0$, 使得对任意分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时, 有

$$0 \leqslant \overline{S}(\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

上述事实告诉我们如下结论: $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \overline{S}(\Delta) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 的充分必要条件是: 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在分割 Δ, 使得

$$0 < \overline{S}(\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

同理, 对于下积分, 我们也有相应的性质. 上积分与下积分的这个性质将应用到可积性问题的讨论中.

现在我们来证明下面的定理.

定理 7.2.5　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则 $f(x) \in R[a,b]$ 的充分必要条件是

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 *必要性* 我们观察到, 对任意的分割, 通过在每个小区间上的特殊取值, 可以使黎曼和任意地接近达布大和或达布小和. 设 $f(x) \in R[a,b]$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

只要 $\lambda(\Delta) < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,(i = 1, 2, \cdots, n)$.

由上、下确界的定义, 存在 $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$f(\xi_i') \geqslant M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{及} \quad f(\xi_i'') \leqslant m_i + \frac{\varepsilon}{b-a},$$

其中

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} x_i]} \{f(x)\} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此有

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon$$

和

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')\Delta x_i > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

由此得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + 3\varepsilon,$$

即

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x < 4\varepsilon.$$

由于 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 是固定常数, 由 ε 的任意性, 必有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

必要性得证.

充分性 由定理 7.2.4 可知, 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 对于任意的分割 Δ, 当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时, 对于 Δ 的任意黎曼和 $S(\Delta)$, 有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \underline{S}(\Delta) \leqslant S(\Delta) \leqslant \overline{S}(\Delta) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

记 $I = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$, 则由上式得

$$|S(\Delta) - I| < \varepsilon.$$

由定积分的定义知 $f(x) \in R[a,b]$. 充分性得证. 证毕.

为了叙述简便, 下面对于 $[a,b]$ 的一个分割 Δ: $a_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 我们总记 ω_i 为 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅.

由定理 7.2.4 和后面的注及定理 7.2.5, 我们有下面的结果.

定理 7.2.6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则下面的三个结论相互等价:

(1) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积;

(2) 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分割 Δ, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon;$$

(3) 对于 $\forall\varepsilon > 0, \forall\sigma > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分割 Δ, 使得 $\omega_i \geqslant \varepsilon$ 的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度总和小于 σ.

证明 我们先证 (1)$\Rightarrow$(2). 设 $f(x) \in R[a,b]$, 由定理 7.2.5 我们有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

再由上、下积分的定义易知, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 Δ, 使得

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}(\Delta)\leqslant\overline{S}(\Delta)<\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)<\varepsilon.$$

(2) 得证.

现证 (2)⇒(1). 由于对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

因此有

$$0\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 我们有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

再由定理 7.2.5 我们知 $f(x)\in R[a,b]$.

下面我们来证明 (2)⟺(3). 首先注意到, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 对 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

总有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{(1)}\omega_i\Delta x_i+\sum_{(2)}\omega_i\Delta x_i,$$

其中 $\sum\limits_{(1)}\omega_i\Delta x_i$ 是对 $\omega_i<\varepsilon$ 的求和, $\sum\limits_{(2)}\omega_i\Delta x_i$ 是对 $\omega_i\geqslant\varepsilon$ 的求和.

先证 (2)⇒(3). 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\sigma>0$, 由 (2), 存在分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \sigma\varepsilon.$$

因此有

$$\varepsilon\sum_{(2)}\Delta x_i \leqslant \sum_{(2)}\omega_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \sigma\varepsilon,$$

即

$$\sum_{(2)}\Delta x_i < \sigma.$$

再证 (3)⇒(2). 记 ω 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅, 不妨设 $f(x)$ 不是常数函数, 因此 $\omega > 0$. 由 (3), 对于 $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 及 $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{2\omega}$, 存在分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得 $\omega_i \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 长度的总和小于 σ. 现在记 $\sum\limits_{(1)'}\omega_i\Delta x_i$ 是对 $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 的求和, $\sum\limits_{(2)'}\omega_i\Delta x_i$ 是对 $\omega_i \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 的求和, 则有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i &= \sum_{(1)'}\omega_i\Delta x_i + \sum_{(2)'}\omega_i\Delta x_i \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{(1)'}\Delta x_i + \omega\sum_{(2)'}\Delta x_i \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \omega\frac{\varepsilon}{2\omega} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

注 定理 7.2.6 实际上回答了我们在本节开始时提出的第一个关于可积性的问题 (问题 (a)), 即在定积分的定义中, 我们可以取一列特

殊的分割 Δ_n, 只要当 $\lambda(\Delta_n) \to 0$ 时, $f(x)$ 关于 Δ_n 的任意黎曼和可以任意接近一个常数 I, 则 $f(x) \in R[a,b]$ 且 $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

7.2.3 可积函数类

由上一节的结果, 我们可以找到一些常见的可积函数类.

定理 7.2.7 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x) \in R[a,b]$.

证明 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅为 ω, 我们不妨设 $\omega > 0$ (否则 $f(x)$ 为一个常数函数). 再设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点的个数为 N. 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 在 $[a,b]$ 上取 N 个互不相交的闭区间, 使得满足: (1) 每个区间的长度大于零小于 $\dfrac{\varepsilon}{2N\omega}$; (2) 它们包含了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的所有的间断点; (3) 它们的内部 (设 $[c,d]$ 为一闭区间, 称 (c,d) 为该区间的**内部**) 包含了 $f(x)$ 在 (a,b) 内所有的间断点. $[a,b]$ 除去这组区间后得到的每个小区间加上端点则为有限个闭区间: $I_1, I_2, \cdots, I_K$. 由于 $f(x)$ 在每个小闭区间 $I_j\,(j = 1,2,\cdots,K)$ 上连续, 从而一致连续, 因此存在 $\delta > 0$, 使得当 x', x'' 属于同一个闭区间 I_j, 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

将每个小区间 I_j 适当等分, 使得等分后的小区间长度小于 δ, 则所有这些小区间的等分点与原来的 N 个区间的端点构成 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 对此分割有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2N\omega}\omega N + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon.$$

证毕.

注 定理 7.2.7 的证明方法可以用来证明以下的结论: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且有无穷多个不连续点, 若这些间断点构成的集合只有有限多个聚点, 则 $f(x) \in R[a,b]$.

另外, 由定积分的定义以及以上我们得到的可积性的判别法容易看出, 若函数 $f(x)\in R[a,b]$, 函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限多个点上的取值不同, 则 $g(x)\in R[a,b]$, 并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 7.2.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则 $f(x)\in R[a,b]$.

证明 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 将 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间, 使得 $\dfrac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n}<\varepsilon$. 设其对应的分割为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=&\sum_{i=1}^n[f(x_i)-f(x_{i-1})]\frac{b-a}{n}\\=&\frac{(b-a)}{n}[f(b)-f(a)]<\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

例 7.2.2 证明黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x\in[0,1],x=\dfrac{q}{p}(p,q>0,\text{为既约正整数}),\\ 0, & x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q},\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上可积, 且 $\displaystyle\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$.

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\sigma>0$, 在 $[0,1]$ 中仅存在有限多个点使得 $R(x)\geqslant\varepsilon$. 设这有限多个点为 $x_1',\cdots,x_N'$. 在 $[0,1]$ 中取 N 个互不相交的小闭区间, 使得每一个区间的长度大于零小于 $\dfrac{\sigma}{N}$, 并且它们包含这 N 个点. 进一步我们要求当 $x_i'\neq 0,1$ 时, x_i' 落在某个小区间的内部. 对于这 N 个小区间的端点构成 $[0,1]$ 的分割 Δ, 那些振幅大于

或等于 ε 的小区间的总和显然小于 $\dfrac{\sigma}{N}\cdot N=\sigma$. 由定理 7.2.6 的 (3) 知 $R(x)\in R[0,1]$.

由于 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 并且对任意的分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 中取 ξ_i 为无理数, 则其黎曼和为

$$\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i)\Delta x_i=0,$$

因此 $\displaystyle\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$.

例 7.2.3 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在任何区间 $[a,b]$ 上可积.

证明 当 $0\notin[a,b]$ 时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 $f(x)\in R[a,b]$; 当 $0\in[a,b]$ 时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有一个间断点 $x_0=0$, 因此由定理 7.2.7 知 $f(x)\in R[a,b]$.

从本例中可以看出, 尽管函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0=0$ 的邻域中变化非常剧烈, 但它仍然在包含 x_0 的区间上可积.

函数的可积性问题将在实变函数论课程中得到完全解决. 在实变函数论课程中将证明以下结论.

定理 7.2.9 (勒贝格定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 记 E 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集, 则 $f(x)\in R[a,b]$ 的充分必要条件是: 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在一列开区间 $(x_{i-1},x_i)\,(i=1,2,\cdots)$, 使得 $E\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(x_{i-1},x_i)$, 并且对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$.

§7.3 定积分的性质

前面我们已经对可积性问题进行了讨论, 在本节中将讨论定积分

的一些基本性质.

首先, 我们作两条自然的规定:

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2) 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积时, $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

定积分具有以下基本性质.

定理 7.3.1 (线性性质) 设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f(x)+\beta g(x)\in R[a,b]$, 并且有

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

此性质可由定积分的定义直接推出, 请读者自证.

定理 7.3.2 设函数 $f(x)\in R[a,b]$, 则 $|f(x)|\in R[a,b]$, 并且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $f(x)\in R[a,b]$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记 $\omega_i(f)$ 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 则有

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

现记 $\omega_i(|f|)$ 为 $|f(x)|$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 由于当 x', $x''\in[x_{i-1},x_i]$ 时, 有

$$||f(x')|-|f(x'')||\leqslant|f(x')-f(x'')|,$$

因此有

$$\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

从而有

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(|f|)\Delta x_i<\varepsilon.$$

所以 $|f(x)| \in R[a,b]$.

对 $[a,b]$ 的任意分割 Δ 及 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取的 ξ_i, 我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

因此, 当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证毕.

定理 7.3.3 设 $a<c<b$, 则函数 $f(x)\in R[a,b]$ 的充分必要条件是: $f(x)\in R[a,c]$ 和 $f(x)\in R[c,b]$. 当 $f(x)\in R[a,b]$ 时, 下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.3.1}$$

证明 必要性 设函数 $f(x)\in R[a,b]$, 我们证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的任何子区间 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ 上可积. 事实上, 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记 ω_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由于 Δ 落在 $[a_1,b_1]$ 中的分割点与 a_1,b_1 构成了 $[a_1,b_1]$ 的一个分割

$$\Delta': a_1=x'_0<x'_1<\cdots<x'_m=b_1,$$

对于此分割显然有

$$\sum_{i=1}^{m}\omega'_i\Delta x'_i<\varepsilon,$$

其中 ω'_i 为 $f(x)$ 在 $[x'_{i-1},x'_i]$ 上的振幅, 而 $\Delta x'_i=x'_i-x'_{i-1}(i=1,2,\cdots,m)$, 因此 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上可积. 特别地, 有 $f(x)\in R[a,c]$, $f(x)\in R[c,b]$.

充分性　对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $f(x)\in R[a,c]$, 存在 $[a,c]$ 的分割

$$\Delta_1: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c,$$

记 ω_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $f(x)\in R[c,b]$, 存在 $[c,b]$ 上的分割

$$\Delta_2: c=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b,$$

记 ω_i' 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}',x_i'](i=1,2,\cdots,m)$ 上的振幅及 $\Delta x_i'=x_i'-x_{i-1}'$, 则有

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然, $\Delta_1\cup\Delta_2$ 是 $[a,b]$ 的一个分割 Δ, 且有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i'<\varepsilon.$$

而上式左边刚好是 $f(x)$ 关于 Δ 的每个小区间的振幅乘以对应小区间的长度之和, 因此 $f(x)\in R[a,b]$.

现证定积分等式 (7.3.1) 成立. 事实上, 对 $[a,c]$ 的任意分割

$$\Delta_1: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c$$

作黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$, 对 $[c,b]$ 的任意分割

$$\Delta_2: c=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$$

作黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{m}f(\xi_i')\Delta x_i'$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i')\Delta x_i'$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于分割 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 的黎曼和. 由于以上的各个黎曼和当小区间最大长度趋于零时都存在极限, 因此定积分等式 (7.3.1) 成立. 证毕.

关于本性质我们要指出的是：如果不假定 $a < c < b$, 但假定函数 $f(x)$ 在所涉及的区间是可积的, 利用在本节开始时的两个规定, 则等式 (7.3.1) 总是成立的. 例如, 设 $a < b < c$, 假定 $f(x) \in R[a,c]$, 则仍然成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

定理 7.3.4 设函数 $f(x), g(x) \in R[a,b]$, 并且对于 $\forall x \in [a,b]$, 有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 7.3.4 的证明是简单的. 事实上对函数 $f(x) - g(x)$ 用定积分的定义及定积分的线性性质, 即可推出该定理的结论.

设函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 如果 $[a,b]$ 是有限个两两互不相交的小区间的并, 并且 $g(x)$ 在每个小区间上均为常数函数, 则称 $g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个**阶梯函数**. 显然闭区间 $[a,b]$ 上的任何阶梯函数是有界的, 而且至多只有有限个间断点, 因此阶梯函数是可积的.

例 7.3.1 设函数 $f(x) \in R[a,b]$, 证明：对于 $\forall \varepsilon > 0$,

(1) 存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 $h(x)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b |f(x) - h(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$;

(2) 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$.

证明 由于 $f(x)\in R[a,b]$, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记 M_i, m_i 和 ω_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的上、下确界和振幅, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

(1) 定义阶梯函数

$$\overline{f}(x)=\begin{cases}M_i, & x\in[x_{i-1},x_i),\ i=1,2,\cdots,n-1,\\ M_n, & x\in[x_{n-1},b]\end{cases}$$

和

$$\underline{f}(x)=\begin{cases}m_i, & x\in[x_{i-1},x_i),\ i=1,2,\cdots,n-1,\\ m_n, & x\in[x_{n-1},b],\end{cases}$$

则 $\overline{f}(x)$ 与 $\underline{f}(x)$ 均为区间 $[a,b]$ 上的阶梯函数. 为了证明 $\overline{f}(x)$ 与 $\underline{f}(x)$ 满足 (1) 中的结论, 我们令

$$\overline{f}_1(x)=\begin{cases}\overline{f}(x), & x\in[a\ b]\ 且\ x\neq x_i,\\ f(x_i), & x=x_i\end{cases}\qquad (i=0,1,\cdots,n).$$

$$\underline{f}_1(x)=\begin{cases}\underline{f}(x), & x\in[a,b]\ 且\ x\neq x_i,\\ f(x_i), & x=x_i\end{cases}\qquad (i=0,1,\cdots,n).$$

容易看出 $\overline{f}(x), \overline{f}_1(x), \underline{f}(x)$ 与 $\underline{f}_1(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的可积函数, 且有

$$\int_a^b|f(x)-\overline{f}(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)-\overline{f}_1(x)|\mathrm{d}x$$

和

$$\int_a^b|f(x)-\underline{f}(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)-\underline{f}_1(x)|\mathrm{d}x.$$

由振幅的定义, 对于 $\forall x\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 有

$$|f(x)-\overline{f}_1(x)|\leqslant\omega_i \tag{7.3.2}$$

和

$$|f(x)-\underline{f}_1(x)| \leqslant \omega_i, \tag{7.3.3}$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-\underline{f}(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^b |f(x)-\underline{f}_1(x)|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-\underline{f}_1(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon\end{aligned}$$

和

$$\int_a^b |f(x)-\overline{f}(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

取 $h(x)=\underline{f}(x)$(或 $\overline{f}(x)$), 即得 (1).

(2) 作折线依次连接 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和 $(x_i, f(x_i))$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 设 $g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的函数, 其图像恰为该折线, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ($g(x)$ 也称为是**分段线性函数**).

同理由振幅的定义, 对于 $\forall x \in [x_{i-1}, x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 有

$$|f(x)-g(x)| \leqslant \omega_i, \tag{7.3.4}$$

因此有

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

从而 (2) 得证.

注 在第十二章傅里叶 (Fourier) 级数的研究中, 我们还要用到以下结论: 设函数 $f(x) \in R[a,b]$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

利用例 7.3.1, 我们很容易证明此结论. 事实上, 由 $f(x) \in R[a,b]$, 从而存在 $M>0$, 使得对于 $x \in [a,b]$, 有 $|f(x)| \leqslant M$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由例 7.3.1, 我们可以找到 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

显然, 从例 7.3.1 中 $g(x)$ 的构造不难看出, 对于 $\forall x\in[a,b]$, 有 $|g(x)|\leqslant M$, 因此有

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x&=\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b\{|f(x)|+|g(x)|\}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b 2M|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&<2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

我们下面继续讨论定积分的性质.

定理 7.3.5　设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, 则 $f(x)g(x)\in R[a,b]$.

证明　由 $f(x),g(x)$ 的可积性知, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是有界函数. 我们取 $M>0$, 使得当 $x\in[a,b]$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant M$ 及 $|g(x)|\leqslant M$. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 再由 $f(x),g(x)$ 的可积性, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记 $\omega_i(h)$ 为函数 $h(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 则有

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}\tag{7.3.5}$$

及

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(g)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}.\tag{7.3.6}$$

对任意的 $x',x''\in[x_{i-1},x_i]$, 由

$$\begin{aligned}&|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\\&\quad\leqslant|f(x'')g(x'')-f(x'')g(x')|+|f(x'')g(x')-f(x')g(x')|\\&\quad\leqslant|f(x'')||g(x'')-g(x')|+|g(x')||f(x'')-f(x')|\end{aligned}$$

推出

$$\omega_i(fg) \leqslant M[\omega_i(f)+\omega_i(g)] \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i\right] < \varepsilon.$$

证毕.

容易看出, 当 $f(x), g(x) \in R[a,b]$ 时, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 未必在 $[a,b]$ 上可积 $\left(\text{如此时 } \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ 可以是无界函数}\right)$; 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以复合, $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上也不一定可积. 例如, 取 $g(x)=R(x)$, 其中 $R(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的黎曼函数, 而取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(g(x))$ 为区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数. 因此 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上不可积. 但当 $f(x)$ 连续时, 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数并且 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 则必定有 $f(g(x)) \in R[a,b]$(见本章习题).

例 7.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

(1) 如果对 $[a,b]$ 的任何子区间 $[a_1,b_1]$ 有 $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$;

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$, 并且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

证明 (1) 用反证法. 倘若 $f(x)$ 不恒为 0, 则存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)\neq 0$. 不妨设 $f(x_0)>0$, 且 $x_0\in(a,b)$. 由 $f(x)$ 的连续性, 存在 $\delta_0>0$, 使得 $[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]\subset[a,b]$, 且当 $x\in[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$ 时, 有

$$f(x)\geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

因此

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0}\mathrm{d}x=\delta_0 f(x_0)>0.$$

这与已知矛盾. (1) 得证.

(2) 用反证法. 当 $f(x)$ 不恒为 0 时, 必存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) > 0$. 由 (1) 的证明过程知, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

但此时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

这与已知矛盾. (2) 得证.

例 7.3.3 设 $0 < q \leqslant p$, 证明 $\ln \frac{p}{q} \leqslant \frac{p-q}{q}$.

证明 当 $p = q$ 时, 结论显然成立. 现在设 $q < p$. 对于 $x \in [q,p]$, 显然有 $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{q}$. 注意到 $\frac{1}{x} \in C[q,p]$, 因此 $\frac{1}{x} \in R[q,p]$. 再注意到 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, 因此对 $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{q}$ 两边从 q 到 p 积分得

$$\ln \frac{p}{q} = \ln x \Big|_q^p = \int_q^p \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_q^p \frac{1}{q}\mathrm{d}x = \frac{p-q}{q}.$$

§7.4 原函数的存在性与定积分的计算

7.4.1 变限定积分

在求函数的不定积分时, 我们知道有些初等函数的不定积分不能由初等函数表示. 另外, 当一个函数比较复杂时, 求不定积分也不是一件容易的事. 因此我们很难知道某类函数是否存在原函数. 利用定积分理论, 我们则可以知道对于非常广泛的函数类, 它们总是存在原函数的.

设函数 $f(t) \in R[a,b]$, 则对于 $\forall x \in [a,b]$, $f(t) \in R[a,x]$. 因此

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数. 我们称 $\Phi(x)$ 为 $f(t)$ 的**变上限定积分**. 同样我们也可以在 $[a,b]$ 上定义 $f(t)$ 的**变下限定积分**

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \quad (x\in[a,b]).$$

下面我们将要看到 $\Phi(x),\Psi(x)$ 总比 $f(t)$ 具有更好的性质. 在这里我们只讨论 $\Phi(x)$ 的情况, 对于 $\Psi(x)$ 的情况请读者自己讨论.

定理 7.4.1 设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(t)\in R[a,b]$ 的变上限积分.

(1) 若 $f(t)\in R[a,b]$, 则 $\Phi(x)\in C[a,b]$;

(2) 若 $f(t)\in C[a,b]$, 则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 并且 $\Phi'(x)=f(x)$(在端点处为单侧导数).

证明 (1) 由 $f(t)\in R[a,b]$, 存在常数 $M>0$, 使得对一切 $t\in[a,b]$, 有 $|f(t)|\leqslant M$. 任取 $x_0\in[a,b]$, 则当 $x\in[a,b]$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\Phi(x)-\Phi(x_0)|=&\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right|\\=&\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^x |f(t)|\mathrm{d}t\right|\\\leqslant&M|x-x_0|.\end{aligned}$$

由此推知 $\Phi(x)\in C[a,b]$.

(2) 现设 $f(t)\in C[a,b]$. 下面我们证明 $\Phi(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处满足 $\Phi'(x_0)=f(x_0)$(对于 $x_0=a$ 或 b 的情形请读者自证). 由 $f(t)$ 的连续性, 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$(不妨设 $\delta<\min\{b-x_0,x_0-a\}$), 当 $|t-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因此, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t}{x-x_0}-\frac{\displaystyle\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t}{x-x_0}\right|$$

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\mathrm{d}t}{x - x_0} \right| \leqslant \frac{\left| \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t \right|}{|x - x_0|}$$

$$< \varepsilon |x - x_0| \frac{1}{|x - x_0|} = \varepsilon.$$

这就证明了

$$\Phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

证毕.

由上述定理我们知道, 区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 总存在原函数, 且其变上限定积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,(x \in [a,b])$ 即是它的一个原函数. 在以上定理的证明中, 我们实际上证明了更强的结论: 若函数 $f(t) \in R[a,b]$, 并且在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则其变上限定积分 $\Phi(x)$ 在 x_0 处可导, 并且有 $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

注 1　若假定函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 从定理 7.4.1 可以简单地推导出牛顿–莱布尼茨公式. 事实上, 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数, 则 $F(x)$ 与 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 同为 $f(x)$ 的原函数, 因此存在常数 C, 使得

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C.$$

在上式中, 令 $x = a$, 得 $F(a) = C$; 令 $x = b$, 得

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

再将积分变量换回 x 即得牛顿–莱布尼茨公式.

注 2　牛顿–莱布尼茨公式是定积分计算的基本方法. 但值得指出的是: 即使一个函数 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$, 有时候 $f(x)$ 也不可积. 例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

它是

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的原函数. 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内无界, 因此 $f(x)$ 在包含 $x=0$ 的任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积. 对于这类存在原函数的无界函数积分问题, 在下一章中我们还将仔细研究.

下面我们进一步考虑积分上 (下) 限是函数时变限定积分的求导问题.

若函数 $f(t)\in C[a,b]$, $u=\varphi(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 且对于 $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\varphi(x)\in[a,b]$, 则对于 $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\displaystyle\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义, 因此它是 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数. 若令

$$G(x)=\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t,$$

则 $G(x)$ 可以看成 $\displaystyle\varPhi(u)=\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. 因此

$$G'(x)=\varPhi'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

类似地, 我们也可考虑积分下限是函数的情况.

例 7.4.1 求导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$.

解 由于 $\mathrm{e}^{-x^2}\in C(-\infty,+\infty)$, 因此它在任何有限闭区间上均可积. 显然有

$$\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

令 $\displaystyle\varPhi(u)=\int_0^u\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, $u=x^2$, 则应用复合函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}(\Phi(u))}{\mathrm{d}u}\right|_{u=x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^{-x^2}=2x\mathrm{e}^{-x^4}-\mathrm{e}^{-x^2}.$$

例 7.4.2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{x^4}$.

解 此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\frac{1}{2}.$$

7.4.2 定积分的计算

从牛顿-莱布尼茨公式知, 对于连续函数的定积分, 只要能找到它的一个原函数, 则定积分的问题即可解决. 因此计算不定积分的公式以及求不定积分的方法均可直接应用到定积分的计算中.

例 7.4.3 求 $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$

解 注意到 $f(x)$ 是分段函数, 我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\\&=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\frac{\pi^2}{8}+1\right).\end{aligned}$$

尽管定积分的计算可以先由不定积分找出原函数, 然后计算原函数端点值的差而得到, 但在定积分的计算中, 有时要比不定积分来得简单. 如在不定积分的换元法中必须将所换变量换回原来的变量, 但在定积分的换元法中, 则无此必要.

定理 7.4.2 (换元法) 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数, 且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,a\leqslant\varphi(t)\leqslant b\,(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证明 一方面, 由于 $f(x) \in C[a,b]$, 因此它在区间 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$. 由牛顿–莱布尼茨公式, 我们有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

另一方面, $F(\varphi(t))$ 是连续函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数, 因此也有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t &= F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

证毕.

注 若在定理 7.4.2 中, 假定函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数, 且 $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a, a \leqslant \varphi(t) \leqslant b(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

另外, 函数 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续的条件可以减弱为 $\varphi'(t) \in R[\alpha\ \beta]$. 关于此结果的证明请读者自己给出.

例 7.4.4 设函数 $f(x) \in C[-a,a]$ $(a > 0)$, 证明:

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明 在 $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 中令 $x = -t$, 则有

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 是偶函数时, 我们有 $f(-x) = f(x)(x \in [-a,a])$. 因此由定

积分的性质有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(1) 得证.

当 $f(x)$ 是奇函数时, 我们有 $f(-x) = -f(x)(x \in [-a, a])$. 因此由定积分的性质有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 得证.

例 7.4.5　求定积分 $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$, $a > 0$.

解　令 $x = a\sin t\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, 则 $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

由此得

$$\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{a^2\cos^2 t}\cos t\mathrm{d}t$$
$$= a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2.$$

例 7.4.6　设 $f(x)$ 是以 $T(T > 0)$ 为周期的连续函数, 证明: 对于任意的 a, 有 $\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$.

证明 由定积分的性质, 我们有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.3.7}$$

令 $x = t + T$, 则有

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t.$$

将此等式中的积分变量 t 换回 x 后, 我们有

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x.$$

将此等式代入 (7.3.7) 即得所证.

例 7.4.7 求定积分 $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 由定积分的性质, 我们有

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

在 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 中令 $x = \pi - t$, 则 $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi \Rightarrow t = 0$, 从而有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\mathrm{d}t \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最后我们得到

$$I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 7.4.8 设 $x_1, x_2 \in (-1,1)$, 定义

$$d(x_1,x_2) = \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\right|.$$

试证明以下结论:

(1) 对任何 $x_1, x_2 \in (-1,1)$, 有 $d(x_1,x_2) \geqslant 0$, 且

$$d(x_1,x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2;$$

(2) $d(x_1,x_2) = d(x_2,x_1)$;

(3) 对任何 $x_1,x_2,x_3 \in (-1,1)$, 成立

$$d(x_1,x_3) \leqslant d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3);$$

(4) 设 $x_0,x_1,x_2 \in (-1,1)$, $w_j = \dfrac{x_j - x_0}{1 - x_0 x_j}$ $(j = 1,2)$, 则 $w_1, w_2 \in (-1,1)$, 并且 $d(w_1,w_2) = d(x_1,x_2)$;

(5) 设 $x_0 \in (-1,1)$, 则 $\lim\limits_{x\to\pm1} d(x_0,x) = +\infty$.

证明 (1) 当 $x_1 = x_2$ 时, 显然 $d(x_1,x_2) = 0$. 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有

$$d(x_1,x_2) = \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+x_2}{1-x_2} - \ln\frac{1+x_1}{1-x_1}\right)\right| > 0.$$

因此若 $d(x_1,x_2) = 0$, 必有 $x_1 = x_2$, 从而 (1) 成立.

(2) 由于 $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\int_{x_2}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$, 两边取绝对值即得 (2).

(3) 当以 x_1, x_3 为端点的开区间包含在以 x_1, x_2 或 x_2, x_3 为端点的开区间时, 显然结论成立. 现不妨设 $x_1 < x_2 < x_3$, 则有

$$\begin{aligned} d(x_1,x_3) &= \int_{x_1}^{x_3} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} \\ &= d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3). \end{aligned}$$

(4) 当 $x_0, x_1 \in (-1,1)$ 时, 我们有

$$0 < (1-x_0^2)(1-x_1^2) = 1 - (x_0^2 + x_1^2) + x_0^2 x_1^2,$$

从而有

$$\begin{aligned} (x_1 - x_0)^2 &= x_1^2 + x_0^2 - 2x_0x_1 \\ &< 1 + x_0^2 x_1^2 - 2x_0 x_1 \end{aligned}$$

$$= (1 - x_0 x_1)^2.$$

因此有 $w_1 \in (-1,1)$. 同理有 $w_2 \in (-1,1)$.

当 $x_0 \in (-1,1)$ 时, $w(x) = \dfrac{x - x_0}{1 - x_0 x}$ 在 $x \in (-1,1)$ 时有定义且有

$$w'(x) = \frac{1 - x_0^2}{(1 - x_0 x)^2} > 0,$$

因此 $w(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调上升. 注意到我们曾经证明过等式

$$\frac{\mathrm{d}w}{1 - w^2} = \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2},$$

因此由定积分的换元法有

$$d(x_1, x_2) = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} \right| = \left| \int_{w_1}^{w_2} \frac{\mathrm{d}w}{1 - w^2} \right| = d(w_1, w_2).$$

(5) 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pm 1} d(x_0, x) &= \lim_{x \to \pm 1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} \right| \\
&= \lim_{x \to \pm 1} \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1 + x}{1 - x} - \ln \frac{1 + x_0}{1 - x_0} \right| \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

注 若在区间 $(-1,1)$ 内如上定义两点间距离 d, 则称该距离为**庞加莱** (Poincaré) **距离或双曲距离**. 容易看出, 在该距离下, $(-1,1)$ 内的柯西序列都是收敛的, 并且其极限是 $(-1,1)$ 内的点. 因此在该距离下, $(-1,1)$ 是完备的.

定理 7.4.3 (分部积分法) 设函数 $u(x), v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 并且 $u'(x), v'(x) \in R[a\ b]$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

证明　在恒等式 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 中, 我们知等式两边的函数在 $[a,b]$ 上均可积, 因此两边从 a 到 b 对 x 积分并利用牛顿–莱布尼茨公式得

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b [u(x)v(x)]'\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

将上述等式整理即得所证.

例 7.4.9　计算定积分 $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解　$$I = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln(1+x))$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

例 7.4.10　证明: 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x \triangleq I_n,$$

并求 I_n 的值.

证明　对 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$ 作变换 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x.$$

下面我们来求 I_n 的递推公式. 对于 $n = 0, 1$, 我们有

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1.$$

当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\mathrm{d}(-\cos x)\\ &= -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}(\sin^{n-1} x)\\ &=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\ &=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,\end{aligned}$$

即 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 因此得

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \quad (k=1,2,\cdots).$$

作为上述定积分的应用, 可以推出下面的**瓦利斯**(Wallis)**公式**:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

事实上, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

从而有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\mathrm{d}x.$$

利用例 7.4.10 有

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

从上式容易推出

$$J_n \triangleq \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n} \triangleq J_n'.$$

由于

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{n\to\infty}(J_n' - J_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n(2n+1)}\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} = 0,\end{aligned}$$

因此瓦利斯公式成立.

§7.5　定积分中值定理

在定积分的理论中, 我们最后介绍定积分的两个重要性质.

7.5.1　定积分第一中值定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 由定积分的几何意义知, 必存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

这里 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可以看成函数 $f(x)g(x) = f(x)\cdot 1$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 其中 $g(x)\equiv 1$. 一个自然的问题是: 函数 $g(x)\equiv 1$ 能否推广成一般的函数? 定积分第一中值定理将回答这个问题.

定理 7.5.1 (定积分第一中值定理)　设函数 $f(x)\in C[a,b]$, $g(x)\in R[a,b]$ 且在区间 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别地, 当 $g(x)\equiv 1$ 时, 有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

证明　不妨设 $g(x)\geqslant 0$, 并令 m, M 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值, 则对于 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

因此有

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 由上式得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, 此时任取 $\xi \in [a,b]$ 即可. 当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$ 时, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由连续函数的介值定理, 必存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}.$$

证毕.

当 $g(x) \equiv 1$ 且 $f(x) \geqslant 0$ 时, 定积分第一中值定理具有鲜明的几何意义, 即由直线 $x=a, x=b, y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围的曲边梯形的面积必与由直线 $x=a, x=b, y=0, y=f(\xi)$ $(\xi \in [a,b])$ 围成的矩形面积相等 (见图 7.5.1).

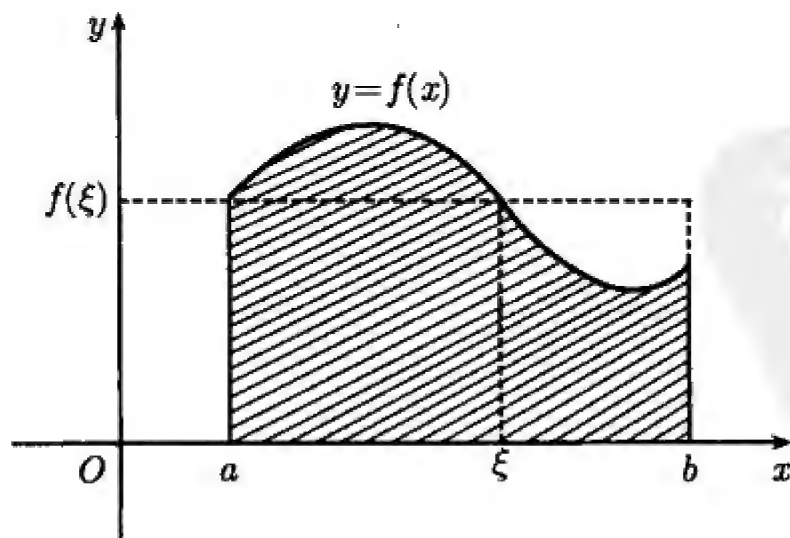


图 7.5.1

注 1 在定积分第一中值定理中, 若只假定 $f(x) \in R[a,b]$, 令

$$m = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \quad M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

则用同样的方法可以证明存在 $\mu \in [m, M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

注 2 若在定积分第一中值定理中假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是连续函数, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则可以证明必存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(见本章习题).

例 7.5.1 设函数 $f(x) \in C[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证明 由于函数 $f(x) \in C[0,1]$, 从而存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall x \in [0,1]$, 有 $|f(x)| \leqslant M$. 由定积分的性质, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x + \int_{n^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x.$$

下面我们分别来估计上面等式右边中的两个定积分. 对于第二个定积分我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{n^{-\frac{1}{3}}}^1 \left|\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{nM}{1+n^{1+\frac{1}{3}}} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

而在第一个定积分 $\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$ 中, $\frac{n}{1+n^2x^2}$ 在 $[0,1]$ 上不变号,

因此存在 $\xi \in [0, n^{-\frac{1}{3}}]$, 使得

$$\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = f(\xi)\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$$
$$= f(\xi)\arctan nx\Big|_0^{n^{-\frac{1}{3}}} = f(\xi)\arctan n^{\frac{2}{3}}.$$

当 $n\to\infty$ 时, 由于 $\xi\in[0,n^{-\frac{1}{3}}]$, 有 $\xi\to 0$, 而 $\arctan n^{\frac{2}{3}}\to\frac{\pi}{2}$, 因此

$$\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x \to \frac{\pi}{2}f(0).$$

最终我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty}\int_{n^{-\frac{1}{3}}}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}f(0).$$

利用定积分的分部积分法我们可以得到带积分余项的泰勒公式, 再利用定积分第一中值定理, 我们还可以从带积分余项的泰勒公式推出带拉格朗日余项和带柯西余项的泰勒公式.

定理 7.5.2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0,h)$ $(h>0)$ 内具有 $n+1$ 阶连续导数 $f^{n+1}(x)$, 则对 $\forall x\in U(x_0,h)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{7.5.1}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

证明 由牛顿–莱布尼茨公式有

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)^0 f'(t)\mathrm{d}t.$$

利用分部积分我们有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)\mathrm{d}t &= -\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}(x-t)\\ &= -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\mathrm{d}t\\ &= f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\mathrm{d}t\\ &= f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f''(t)\mathrm{d}(x-t)^2\\ &= f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)\mathrm{d}t\\ &= f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再将上式中的积分继续分部积分, 逐次类推即可得到所要结论. 证毕.

注 1　定理 7.5.2 中的带余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t$$

的公式 (7.5.1) 称为**带积分余项的泰勒公式**, 该余项也称为**积分余项**. 在定理 7.5.2 的条件下, 我们可以推出带拉格朗日余项的泰勒公式. 事实上, 在 x_0 与 x 之间, $g(t)=(x-t)^n$ 是关于 t 的连续函数并且是不变号的, 而 $f^{(n+1)}(t)$ 是连续的, 因此, 由定积分第一中值定理的注 2, 在 x 与 x_0 之间存在 ξ, 使得下式成立:

$$\begin{aligned}R_n(x)=&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t\\ =&\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{d}t\\ =&\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

这就是在泰勒公式中的拉格朗日余项.

注 2 从定理 7.5.2 中我们还可以推出带以下柯西余项的泰勒公式, 即在定理 7.5.2 的条件下, 我们有

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \qquad (7.5.2)$$

其中 $0<\theta<1$. 事实上, 对积分余项应用定积分第一中值定理的注 2 知, 在 x 与 x_0 之间存在 ξ, 使得下式成立:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

注意到 $x-\xi=(x-x_0)-\theta(x-x_0)=(1-\theta)(x-x_0)$, 其中 $0<\theta<1$. 将此代入上式整理即得 (7.5.2).

形如 (7.5.2) 的余项称为**柯西余项**,带此余项的泰勒公式称为**带柯西余项的泰勒公式**.

7.5.2 定积分第二中值定理

设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单调上升的函数且 $f(x)\geqslant 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 从而有

$$f(b)(b-b)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b)(b-a).$$

于是存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(b)(b-\xi) = f(b)\int_\xi^b \mathrm{d}x.$$

因此人们不禁要问：对区间 $[a,b]$ 上的可积函数 $g(x)$, 是否也存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$? 定积分第二中值定理将回答这个问题. 该定理在后面章节中将多次用到.

定理 7.5.3 (定积分第二中值定理) 设函数 $g(x)\in R[a,b]$.

(1) 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调上升, 且对于$\forall x\in[a,b]$, 有 $f(x)\geqslant 0$, 则存在 $\xi_1\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_{\xi_1}^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调下降, 且对于 $\forall x\in[a,b]$, 有 $f(x)\geqslant 0$, 则存在 $\xi_2\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi_2} g(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由于定理 7.5.3 的条件比较弱, 从而它的证明也比较复杂. 为了看出定理 7.5.3 的证明思路, 我们的方法是先尝试证明该定理在一些较强条件下的相同的结果; 然后对其证明过程加以考察, 分析出证明的关键所在, 从而找到在较弱条件下的证明思路. 以 (1) 为例, 若在原来假定下, 再假设 $g(x)\in C[a,b]$, $f(x)\in C^1[a,b]$, 则有 $f'(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$, 且 $f(a)\geqslant 0$. 在这种情况下, 我们可以用下面简单方法来证明 (1).

令 $G(x)=\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$, 则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导. 设 m,M 分别为 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值. 由 $G'(x)=-g(x)$, $G(b)=0$, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= -\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x)\\ &= -f(x)G(x)\Big|_a^b + \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x\\ &= f(a)G(a) + \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再由

$$m[f(b)-f(a)]\leqslant \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x \leqslant M[f(b)-f(a)],$$

我们推出

$$f(a)G(a)+\int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)M+M[f(b)-f(a)]=Mf(b)$$

和

$$f(a)G(a)+\int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)m+m[f(b)-f(a)]=mf(b).$$

因此有

$$mf(b)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant Mf(b).$$

若 $f(b)=0$, 则 $f(x)\equiv 0$, 结论显然成立. 现设 $f(b)>0$, 则有

$$m\leqslant\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{f(b)}\leqslant M.$$

由连续函数的介值定理, 存在 $\xi_1\in[a,b]$, 使得

$$G(\xi_1)=\int_{\xi_1}^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{f(b)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

因此 (1) 成立.

从上述讨论可以看出, 若要证明定理 7.5.3 中的 (1), 我们仍然可以设 $G(x)=\displaystyle\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$. 由 $g(x)$ 的可积性知 $G(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 如果在这种情形下还是能证明不等式

$$mf(b)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant Mf(b)$$

成立, 其中 m,M 分别为 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值, 我们就可以证明 (1) 成立. 但现在我们的假定只是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 因此我们只能从定积分的定义出发来证明该结论. 在定理 7.5.3 的证明过程中, 还需要用到下面的阿贝尔变换. 为此, 我们将其以引理的形式给出.

引理 7.5.4 (阿贝尔变换)　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为两组数, 记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i\ (k=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_nB_n.$$

证明　由 $\beta_i=B_i-B_{i-1}\,(i=2,3,\cdots,n)$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i&=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i(B_i-B_{i-1})+\alpha_1B_1\\&=B_1(\alpha_1-\alpha_2)+B_2(\alpha_2-\alpha_3)+\cdots\\&\quad+B_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+B_n\alpha_n.\end{aligned}$$

证毕.

有了上述的准备, 我们现在来证明定积分第二中值定理.

定理 7.5.2 的证明　我们只证 (2) 和 (3), (1) 的证明留给读者. 为了证明 (2), 我们令 $h(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. 由变限定积分的性质知 $h(x)\in C[a,b]$. 记

$$m=\min_{x\in[a,b]}\{h(x)\},\quad M=\max_{x\in[a,b]}\{h(x)\}.$$

由于函数 $g(x)\in R[a,b]$, 存在 $0<M_1<+\infty$, 使得对于 $\forall x\in[a,b]$, 有 $|g(x)|\leqslant M_1$.

设 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的任一个分割, 则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M_1\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to0\quad(\lambda(\Delta)\to0),$$

其中 ω_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 我们有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x.$$

因此我们只要对

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})[h(x_i)-h(x_{i-1})]$$

进行估计即可.

利用阿贝尔变换 (引理 7.5.4), 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})[h(x_i)-h(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)]h(x_i)+f(x_{n-1})h(b).$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调下降的, 我们有 $f(x_{i-1})-f(x_i)\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,n-1)$, 再注意到 $f(b)\geqslant 0$ 和 $m\leqslant h(x)\leqslant M$, 可以推出

$$\begin{aligned}mf(a)&=\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)]m+f(x_{n-1})m\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)]h(x_i)+f(x_{n-1})h(b)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)]M+f(x_{n-1})M\\&=Mf(a).\end{aligned}$$

由此得到

$$mf(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})[h(x_i)-h(x_{i-1})]\leqslant Mf(a).$$

若 $f(a)=0$, 则 $f(x)\equiv 0$, 结论显然成立. 若 $f(a)\neq 0$, 则有

$$m\leqslant\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\leqslant M.$$

因此存在 $\xi_2 \in [a,b]$, 使得

$$h(\xi_2) = \int_a^{\xi_2} g(x)\mathrm{d}x = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{f(a)}.$$

(2) 证毕.

现在证 (3). 不妨设 $f(x)$ 单调上升, 则 $F(x) = f(x) - f(a)$ 满足 (1). 由 (1) 知, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x = F(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x = [f(b)-f(a)]\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= f(a)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= f(a)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x - f(a)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证毕.

例 7.5.2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调上升, 证明

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　对函数 $f(x)$ 及 $g(x) = x - \dfrac{a+b}{2}$ 在区间 $[a,b]$ 上应用定积分第二中值定理知, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x &= f(a)\int_a^\xi \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= [f(b)-f(a)]\frac{b-\xi}{2}(\xi-a) \geqslant 0.\end{aligned}$$

整理即得所要结论.

例 7.5.3 设函数 $f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并且 $f'(0)=0$.

证明 对任给的 $x>0$, 由于 $\sin\dfrac{1}{t}$ 在区间 $[0,x]$ 上可积, 从而有

$$\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to 0+0}\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

对于 $\forall 0<\delta<x$, 在上面等式右端中的定积分作积分变换 $t=\dfrac{1}{u}$, 得

$$\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\delta}}\frac{\sin u}{u^2}\mathrm{d}u.$$

对上面等式右端中的定积分应用定积分第二中值定理知, 存在 $\xi_\delta\in\left[\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{\delta}\right]$, 使得

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\delta}}\frac{\sin u}{u^2}\mathrm{d}u=x^2\int_{\frac{1}{x}}^{\xi_\delta}\sin u\mathrm{d}u.$$

由于 $\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\xi_\delta}\sin u\mathrm{d}u\right|\leqslant 2$, 因此, 对任意的 $\delta>0$, 有

$$\left|\int_\delta^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant 2x^2.$$

于是对于任意给定的 $x>0$, 令 $\delta\to 0+0$, 得

$$\left|\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant 2x^2.$$

注意到 $\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 是偶函数, 从而上式对 $x<0$ 也成立. 因此有

$$0\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}=0.$$

从上式我们知, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=0.$$

§7.6 定积分在几何学中的应用

7.6.1 直角坐标系下平面图形的面积

根据定积分的几何意义可以直接求出一些简单平面图形的面积. 设平面图形 S 的边界是由直线 $x=a, x=b$ 及连续函数 $y=f(x), y=g(x)\,(x\in[a,b])$ 的图像所组成 (其中 $g(x)\leqslant f(x), x\in[a,b]$, 见图 7.6.1), 我们称这种形状的平面图形 S 为 X 型区域. 对于这种区域的面积 A, 由定积分的几何意义立即得到

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

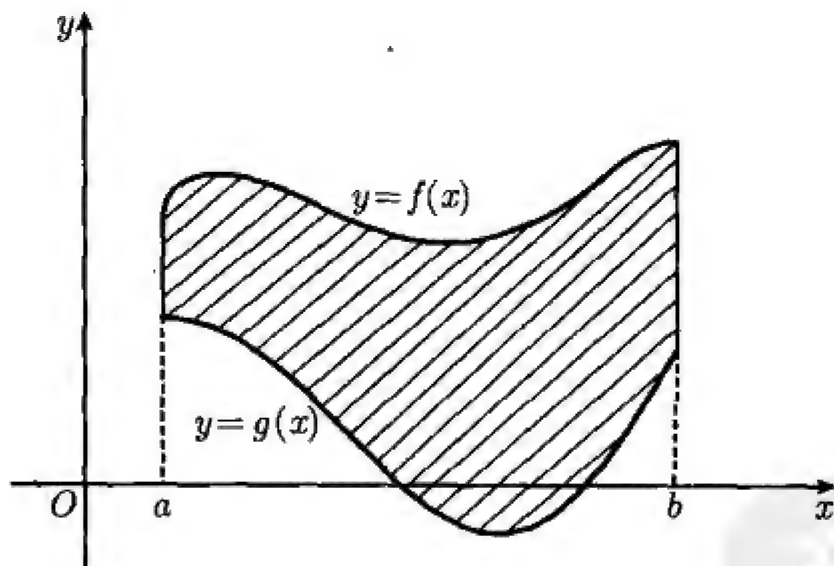


图 7.6.1

若平面图形 S 的边界是由直线 $y=c, y=d$ 及连续函数 $x=\varphi(y), x=\psi(y),\ y\in[c,d]$ 的图像所组成 (其中 $\varphi(y)\leqslant\psi(y), y\in[c,d]$, 见图 7.6.2), 则我们称这种平面图形 S 为 Y 型区域. 对于这种区域的面积 A, 由定积分的几何意义, 我们有以下的计算公式

$$A=\int_c^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

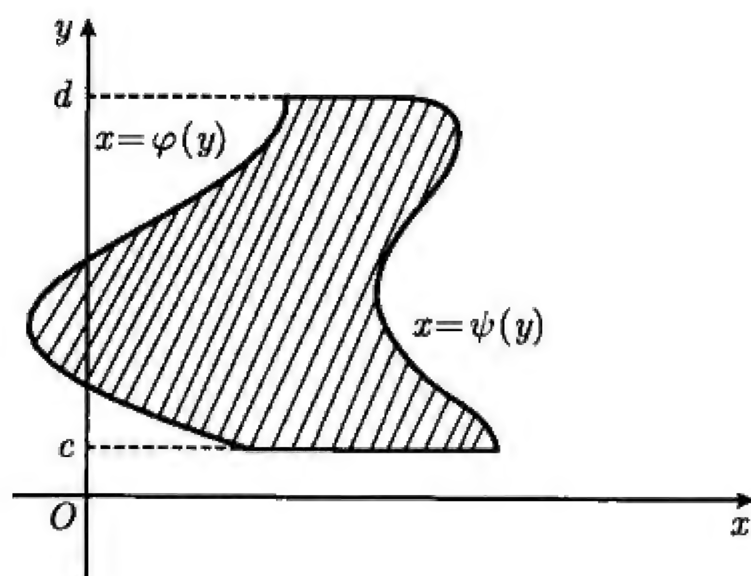


图 7.6.2

因此当一个平面图形 S 可以分成有限个互不相交的 X 型或 Y 型区域时, 我们就可以求出 S 的面积.

例 7.6.1 求由直线 $y=2, y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围平面图形 S 的面积 A.

解 从图 7.6.3 可以看出, S 是 Y 型区域, 因此有

$$A=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}-\ln y\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

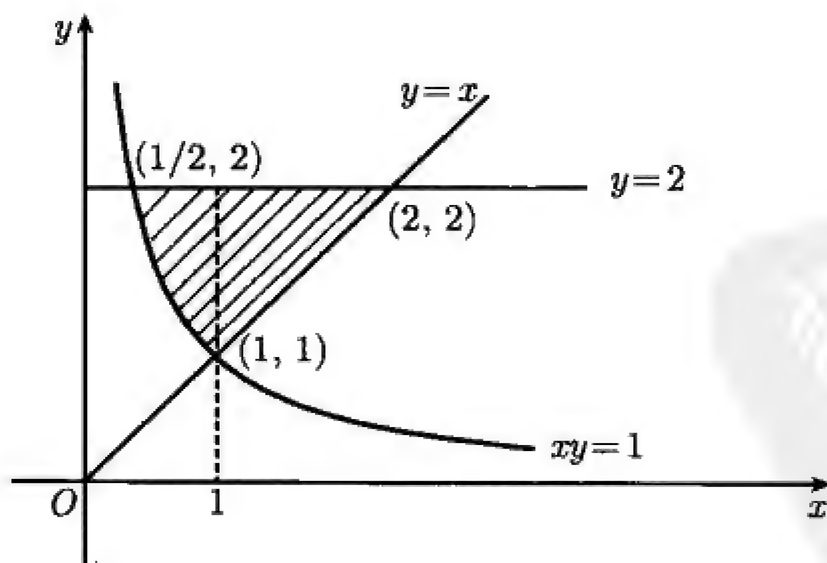


图 7.6.3

我们也可通过添加辅助线 $x=1$ 将图形 S 分割成两个 X 型区域来进行计算：

$$\begin{aligned}A&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x\\&=(2x-\ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}\\&=\frac{3}{2}-\ln 2.\end{aligned}$$

例 7.6.2 (Young 不等式) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上严格上升的连续函数, 且满足 $f(0)=0$, 证明：对任何的 $a>0,b>0$, 有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y,\tag{7.6.1}$$

并且上述不等式中等号成立的充分必要条件是 $b=f(a)$.

证明 首先我们注意到, 若 $y=\varphi(x)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上严格上升的非负连续函数, 则由定积分的几何意义有 (见图 7.6.4)

$$\beta\varphi(\beta)-\alpha\varphi(\alpha)=\int_\alpha^\beta\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\varphi^{-1}(y)\mathrm{d}y.\tag{7.6.2}$$

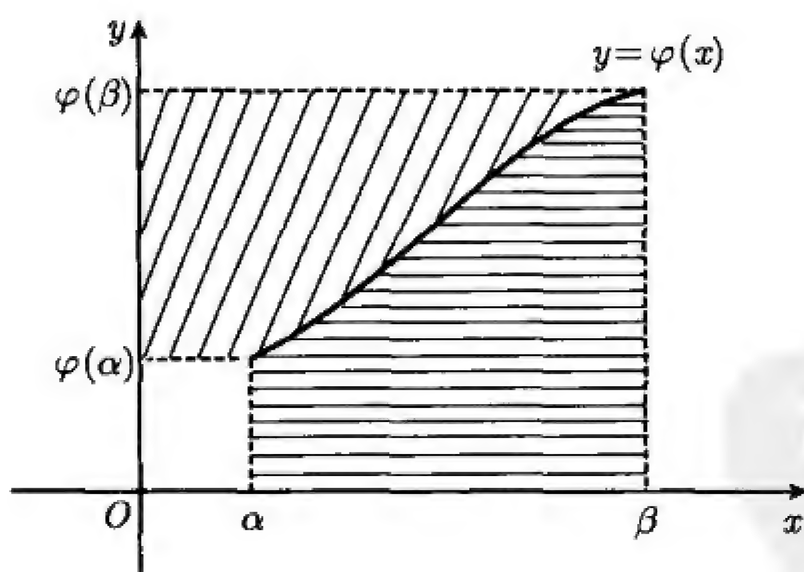


图 7.6.4

现在我们回到 $f(x)$. 先设 $0<b\leqslant f(a)$, 由于 $f(x)$ 的严格上升性, 我们有以下不等式

$$[a-f^{-1}(b)]b \leqslant \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

整理得

$$ab-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \leqslant bf^{-1}(b)-\int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (7.6.3)$$

在式 (7.6.2) 中令 $\alpha=0,\beta=b,\varphi(x)=f^{-1}(x)$, 则有

$$bf^{-1}(b)-\int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y,$$

将上述等式代入 (7.6.3) 即得所证.

当 $0<f(a)\leqslant b$ 时, 我们可以从 $y=f^{-1}(x)$ 出发, 重复以上论证即可证明所要的结论.

显然, 当 $b=f(a)$ 时, 上面的每一不等式均成立等式, 从而 (7.6.1) 中成立等式. 反之, 若 (7.6.1) 式的等号成立, 则由 $f(x)$ 的严格上升性知必有 $b=f(a)$.

7.6.2 参数方程表示的曲线所围平面图形的面积

设平面图形 S 的边界曲线 γ 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出, 其中 $x(\alpha)=x(\beta),y(\alpha)=y(\beta)$, 曲线 γ 除了端点重合外再无自交点 (如图 7.6.5). 假定 $x'(t),y'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上存在且连续. 为了叙述简便起见, 我们称这种曲线为 C^1 **曲线**. 再假定 t 从 α 连续变化

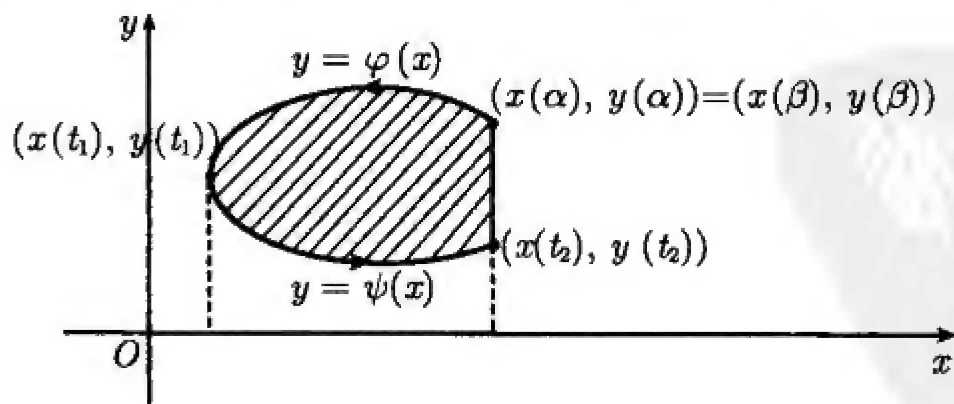


图 7.6.5

到 β 时, 如果一个人沿着 γ 行走, 图形 S 总在他的左边. 这种规定给出了 γ 的一个**正定向**. 以后我们总假定所求面积的图形是由满足上述条件的曲线所围.

现在假设曲线$\gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 围成一个 X 型区域, 如图 7.6.5 所示, 我们希望利用直角坐标求面积的公式来导出参数方程求面积的公式. 注意到当 t 从 α 严格上升到 t_1 时, x 从 $x(\alpha)$ 严格下降到 $x(t_1)$, 因此 $x(t)$ 在区间 $[\alpha, t_1]$ 上存在反函数 $t = t^{-1}(x)$. 将其代入 $y = y(t)$ 得 $y = y(t^{-1}(x)) \triangleq \varphi(x)\,(x \in [x(t_1), x(\alpha)]$. 同理, $x(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上也存在反函数 $t^{-1}(x)$, 因此当 $t \in [t_1, t_2]$ 时, $y = y(t^{-1}(x)) \triangleq \psi(x)\,(x \in [x(t_1), x(t_2)]$. 于是由定积分的几何意义及定积分的变量替换公式, 该 X 型区域的面积 A 由以下等式表出:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x(t_1)}^{x(\alpha)} \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \psi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\alpha}^{t_1} y(t)x'(t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\mathrm{d}t - \int_{t_2}^{\beta} y(t)\cdot 0\mathrm{d}t \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

同理, 若上述图形一个 Y 型区域. 读者可以推出 γ 所围区域的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

如果 γ 所围图形可以添加几条 C^1 曲线后成为若干块 X 型或 Y 型区域 (见图 7.6.6), 则 γ 所围区域的面积仍具有形式

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)\mathrm{d}t = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7.6.4}$$

这是因为 γ 所围图形的面积是各小块图形的面积之和, 而添加的曲线必定是两块小图形的共同边界. 沿着添加的曲线的积分必须要积两次,

但由于曲线相对它所围的图形的定向相反, 因此在这些添加曲线上的积分互相抵消.

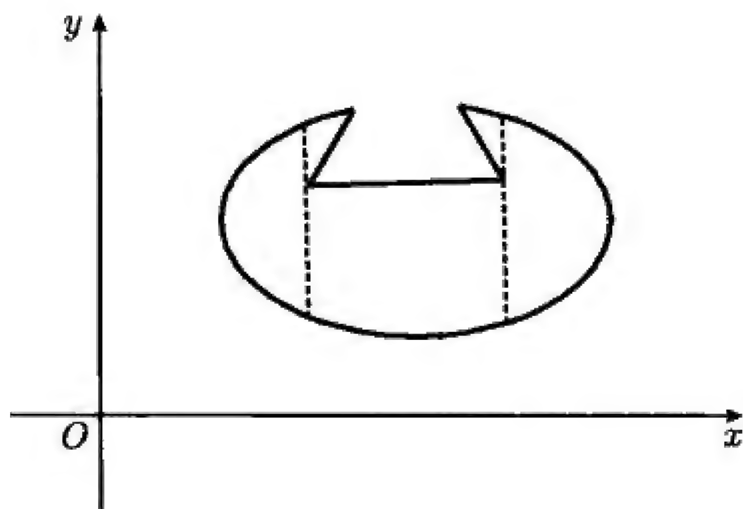


图 7.6.6

为了简便起见, 可以将 (7.6.4) 简记为

$$A = \int_\gamma x\mathrm{d}y = -\int_\gamma y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\gamma x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

若不指明 γ 的定向, 则积分总是取 γ 的正向.

例 7.6.3 计算椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形 S 的面积 A (见图 7.6.7).

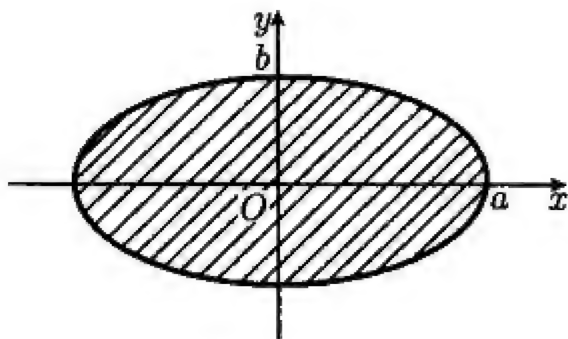


图 7.6.7

解法 1 因为 S 是一个 X 型区域, 其中上、下曲线分别为 $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 因此

$$\begin{aligned}A &= 2\int_{-a}^{b}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \pi ab.\end{aligned}$$

解法 2 将椭圆方程写成参数方程

$$\gamma:\begin{cases}x = a\cos t,\\ y = b\sin t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi],$$

则当 t 从 0 连续变为 2π 时, 该曲线为正定向. 因此

$$A=\int_\gamma x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}a\cos t\cdot b\cos t\mathrm{d}t$$
$$=ab\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\pi ab.$$

7.6.3　微元法

在以下各个小节中我们将推导一些平面或空间几何体的面积公式或体积公式. 在这里我们利用定积分的思想归纳出推导这些公式的一个普遍的方法, 即所谓的微元法.

我们考查正连续函数 $y=f(x)\,(x\in[a,b])$ 的定积分 $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 我们已经知道它的几何意义是由曲线 $y=f(x)\,(x\in[a,b])$, x 轴及直线 $x=a, x=b$ 所围的面积.

对区间 $[0,S]$ 作分割 $\Delta_S: 0=s_0<s_1<\cdots<s_n=S$, 则有

$$\sum_{i=1}^n(s_i-s_{i-1})=\sum_{i=1}^n\Delta s_i=S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.6.5}$$

由于 $f(x)>0$, 因此对于 $[0,S]$ 的分割相应地有 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得 Δs_i 恰好是曲线 $y=f(x)\,(x\in[x_{i-1},x_i])$ 与直线 $x=x_{i-1}, x=x_i$ 及 x 轴所围的面积. 容易看出当 $\lambda_S=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}\to 0$ 时, 有 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$. 因此, $f(x)$ 的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\to\sum_{i=1}^n\Delta s_i=S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.6.6}$$

区间 $[0,S]$ 的长度和将它分成一些小区间再加起来是一样的. 现在我们换一种比较高的观点来看此问题. 任取 $[s,s+\Delta s]\subset[0,S]$, 当 s 是自变量时, $\Delta s=\mathrm{d}s$. 因此将小区间的长度加起来, 也就是将 $\mathrm{d}s$ 在 $[0,S]$ 上积分起来, 即 $S=\displaystyle\int_0^S\mathrm{d}s$.

另外, 我们从 (7.6.6) 可以知道, $[s, s+\Delta s]$ 对应有一个 $[x, x+\Delta x]$ 使得 $\Delta s = f(\xi)\Delta x$, 其中 $\xi \in [x, x+\Delta x]$. 当 Δs 很小时, Δx 也很小. 现在我们将 x 看成自变量, 则有 $\Delta x = \mathrm{d}x$. 若将 ξ 取成 x, 则由于 $\Delta x \to 0$ 时有 $\Delta s = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$. 由此我们有 $\mathrm{d}s = f(x)\mathrm{d}x$. 因此得到

$$S = \int_0^S \mathrm{d}s = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.6.7}$$

将上面的过程总结一下. 我们希望求 S, 即曲线 $y = f(x)\,(x \in [a, b])$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 $y = 0$ 所围的曲面梯形的面积. 假定我们不知道求该面积的公式, 现在来找出该公式. 为此我们任取一小曲边梯形: 由过 x, $x+\Delta x$ 的两条行于 y 轴的直线、直线 $y = 0$ 与曲线 $y = f(x)$ 所构成的小曲边梯形 (如图 7.6.8). 同时得到 $[0, S]$ 上的一个小区间 $[s, s+\Delta s]$, 使得 Δs 等于该小曲边梯形的面积, 即有

$$\Delta s = f(\xi)\Delta x \approx f(x)\Delta x = f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 ξ 是 $[x, x+\Delta x]$ 中的某一点. 如果 $f(x)$ 连续, 则有 $\mathrm{d}s = f(x)\mathrm{d}x$. 因此我们得到了 (7.6.7).

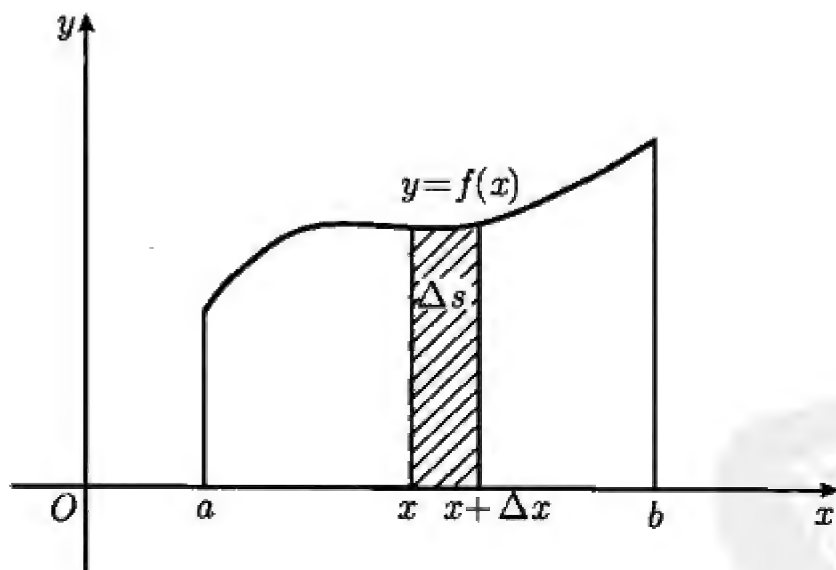


图 7.6.8

去掉上述例子的具体背景, 我们可以归纳出以下求某些量的一般方法. 设所求的量是 S, 它与区间 $[a, b]$ 有关, 当区间 $[a, b]$ 给定后, S 就是一个确定的量, 而且该量对该区间具有可加性, 即对于 $[a, b]$ 的

任意分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 若记 $[x_{i-1}, x_i]$ 对应的部分量为 $\Delta s_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$. 为求 S, 我们可以任取小区间 $[x, x + \mathrm{d}x] \subset [a, b]$, 若 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 所对应的部分量 $\Delta s = f(\xi)\mathrm{d}x\,(\xi \in [x, x + \mathrm{d}x])$, 其中 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个连续函数, 则我们即有 $\mathrm{d}s = f(x)\mathrm{d}x$, 并且 $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 这个求 S 的过程也称**微元法**, 其中 $\mathrm{d}s = f(x)\mathrm{d}x$ 称为量 S 的**微元**. 微元法在后续章节中也多次用到.

7.6.4　极坐标方程表示的曲线所围平面图形的面积

在本小节中, 我们设曲线 γ 由 $r = r(\theta)\,(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 所表示, 其中 $r(\theta)$ 是 θ 的连续函数. 现在我们来求曲线 γ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形 (见图 7.6.9) 的面积 A.

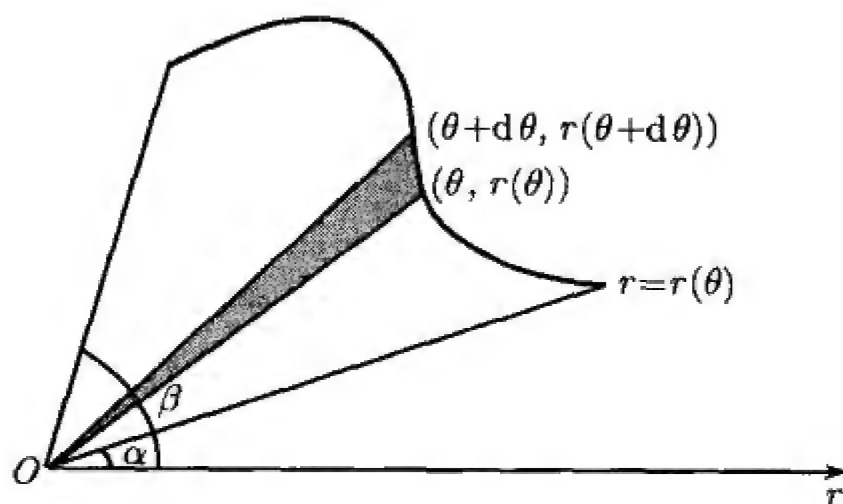


图　7.6.9

我们用微元法来推导其面积公式. 任取 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta] \subset [\alpha, \beta]$. 因此由曲线 $r = r(\theta)$ 及向径 $\theta_1 = \theta, \theta_2 = \theta + d\theta$ 所围的图形近似于一个三角形, 其高近似为 $r(\theta)$, 而底边长近似为 $r(\theta)\mathrm{d}\theta$, 因此其面积微元为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

从 α 到 β 将其面积微元积分得

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

例 7.6.4 求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 所围平面图形 S 的面积 A.

解 $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = \dfrac{3}{2}\pi a^2.$

例 7.6.5 求由圆弧 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{3}{4}\pi\right)$ 及 x 轴和直线 $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 所围平面图形的面积 (见图 7.6.10).

解法 1 我们用参数方程所围平面图形的面积公式来求, 注意到在线段 BC 上有 $\mathrm{d}x = 0$, 而在线段 CD 上有 $y = 0$, 因此该图形的面积为

$$\begin{aligned} A &= -\int_0^{\frac{3}{4}\pi} y\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin t(-\sin t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

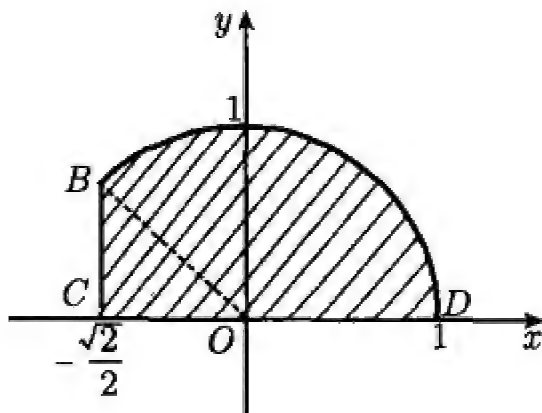


图 7.6.10

解法 2 现在我们用极坐标表示的曲线所围平面图形的面积公式. 参数方程表示的圆弧方程为 $r = 1$ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3}{4}\pi\right)$. 所围图形面积 A 应为扇形 BOD 的面积加上三角形 OBC 的面积:

$$A = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{2}\cdot 1^2\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}.$$

7.6.5 平行截面面积为已知的立体的体积

利用定积分, 我们还可以求出空间一些规则立体图形的体积. 设空间某立体 Ω 介于平面 $x = a$ 和 $x = b$ 之间, 假定过 $x \in [a,b]$ 并且与 x 轴垂直的平面截该立体 Ω 的截面的面积为已知函数 $A(x)$ (见图 7.6.11), 进一步假定 $A(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 现在我们来

求 Ω 的体积 V.

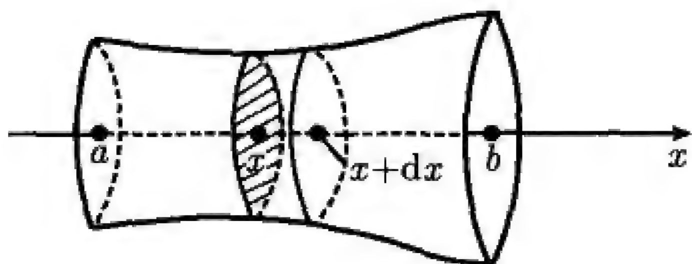


图 7.6.11

利用微元法, 任取 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a, b]$, Ω 夹在过点 $x = x$ 和 $x = x + \mathrm{d}x$ 并且与 x 轴垂直的两个平面之间的部分近似于一个柱体, 因此体积微元 $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$. 将体积微元从 a 到 b 积分得

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

特别地, 若该立体 Ω 的边界曲面是由平面 $x = a$, $x = b$ 以及 Oxy 平面内一条曲线 $y = f(x) \geqslant 0\,(x \in [a, b])$ 绕 x 轴旋转而成, 则称这个立体为**旋转体**. 这种旋转体 Ω 与过 $x \in [a, b]$ 并且与 x 轴垂直的平面相截的面积为 $A(x) = \pi f^2(x)$. 因此 Ω 的体积 V 由下面公式给出:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

例 7.6.6　求椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\,(a, b, c > 0)$ 的体积 V.

解　对于每个 $x \in [-a, a]$, 过点 x 且与 x 轴垂直的平面截该椭球体的截面为椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1$ 所围的平面图形. 由例 7.6.2 知该图形的面积为 $\pi bc\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$, 因此

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

例 7.6.7 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 绕 x 轴旋转一周所成的立体体积 V.

解 由旋转体的体积公式, 我们有

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-a}^{a}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\mathrm{d}x=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

7.6.6 曲线的弧长

设平面曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出. 若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 则我们称 Γ 是一条**连续曲线** (简称曲线). 我们下面涉及的曲线, 除特别说明外, 均指连续曲线.

下面我们来讨论曲线的弧长问题. 为此我们将面临以下三个问题:

(1) 如何来定义曲线的弧长?

(2) 是不是曲线都有弧长?

(3) 对有弧长的曲线怎样来求出它的弧长?

首先来讨论问题 (1). 设平面曲线 Γ 的起点为 A, 终点为 B. 由于我们目前能够精确求出线段长度, 因此希望用线段的长度去逼近曲线的长度. 为此我们在 Γ 上从 A 到 B 依次取 $n+1$ 个点 $A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_{n-1},M_n=B$. 这 $n+1$ 个点将 Γ 分成了 n 段小弧段. 记 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为以 M_{i-1},M_i 两点为端点的线段的长度. 如果分点无限增加, 且当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{L_i\}\to 0$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}L_i$ 有极限 L, 则称 Γ 为**可求长曲线**, 并且定义 Γ 的长度为 L,.

现在我们来讨论问题 (2): 是不是曲线都可以求长度呢? 为此我们考虑由下述参数方程表示的曲线 Γ: 当 $t\in(0,1]$ 时, $x=t,y=t\sin\dfrac{1}{t}$; 当 $t=0$ 时, $x=y=0$.

我们取 $t_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{1}{2}\pi},t_n''=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{1}{2}\pi}$ $(n=1,2,\cdots,N)$, 设 Γ 上

对应 t'_n 的点为 M'_n, 而对应 t''_n 的点为 M''_n, 则我们有

$$\sum_{n=1}^{N} L_n > \sum_{n=1}^{N} \left| t'_n \sin\frac{1}{t'_n} - t''_n \sin\frac{1}{t''_n} \right| = \sum_{n=1}^{N} (t'_n + t''_n) > \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

其中 $L_n(n=1,2,\cdots,N)$ 是连接 M'_n 和 M''_n 的线段的长度. 因为当分点个数 $N \to \infty$ 时, 不等式右端将趋于 $+\infty$, 从而 $\varGamma$ 是不可求长的曲线.

从上面的例子可知, 并非所有的曲线都是可求长的, 我们必须对曲线加上适当条件才能使得它是可求长的.

下面我们将讨论问题 (3). 如果我们要对一般的可求长曲线来求出它的长度, 除了利用弧长的定义外, 似乎很难找到其他的求弧长公式. 为了利用微积分的工具来讨论曲线的求长问题, 我们必须对可求长曲线加上适当的光滑条件, 因此在下面主要讨论光滑曲线的求长问题. 设 $\varGamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 是一条曲线, 如果它满足 $x'(t), y'(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在且连续, 并且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 则称 $\varGamma$ 是一条**光滑曲线**.

我们下面还是用微元法来推导这类曲线的弧长公式. 任取 $[t, t+\mathrm{d}t] \subset [\alpha, \beta]$, 得到曲线上两个点 $M_t(x(t), y(t))$, $M_{t+\mathrm{d}t}(x(t+\mathrm{d}t), y(t+\mathrm{d}t))$, 则弦长 $\overline{M_t M_{t+\mathrm{d}t}}$ 有以下计算公式:

$$\begin{aligned}\overline{M_t M_{t+\mathrm{d}t}} &= \sqrt{[x(t+\mathrm{d}t) - x(t)]^2 + [y(t+\mathrm{d}t) - y(t)]^2} \\ &= \sqrt{[x'(\xi_1)]^2 + [y'(\xi_2)]^2}\mathrm{d}t \\ &\approx \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 ξ_1, ξ_2 在 t 与 $t+\mathrm{d}t$ 之间. 因此, 当 $\mathrm{d}t$ 很小时, 两点之间的弧长 ΔL 可以由弦长近似表出:

$$\Delta L \approx \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

这样我们得到弧长微元如下:

$$\mathrm{d}L = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

因此 Γ 的弧长公式为

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

特别地, 当曲线 Γ 为函数 $y = f(x)\,(x \in [a,b])$ 的图像时, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数, 则有

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

如果曲线 Γ 由极坐标 $r = r(\theta)\,(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 方程给出, 其中 $r'(\theta)$ 在 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 上存在并且连续, 则我们可将其写成参数式

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

从而弧长微元为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \sqrt{[r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta]^2 + [r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta]^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

因此 Γ 的长度 L 有下面的计算公式:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$$

如果 Γ 是空间曲线, Γ 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$$

给出, 并且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续且不同时为零, 则 Γ 的弧长 L 有下面的计算公式:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

例 7.6.8 求曲线 $\Gamma: y=x^2\ (x\in[0,1])$ 的弧长 L.

解 $L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+[(x^2)']^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$

$$=\left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}.$$

例 7.6.9 求双纽线 $r^2=2a^2\cos2\theta\ (a>0)$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 之间的弧的长度 L.

解 对 $r^2=2a^2\cos2\theta$ 两边关于 θ 求导得 $2rr'=-4a^2\sin2\theta$, 因此

$$r'(\theta)=\frac{-2a^2\sin2\theta}{r},$$

且

$$\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}=\sqrt{r^2+\frac{(-2a^2\sin2\theta)^2}{r^2}}=\sqrt{\frac{r^4+4a^4\sin^2 2\theta}{r^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\cos2\theta}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}.$$

最后得到

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta.$$

此积分称为**椭圆积分**, 由于被积函数没有初等原函数, 因此需要用其他的方法算出其值.

7.6.7 旋转体的侧面积

下面我们来讨论旋转体的侧面积问题. 设 Γ 为一光滑曲线, 其参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

再设当 $t \in [\alpha,\beta]$ 时, $y = y(t) \geqslant 0$, 则曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周后与 $x = x(\alpha)$ 和 $x = x(\beta)$ 两个平面围成一个旋转体 Ω. 现在我们用微元法来推导 Ω 的侧面积 S 的计算公式.

任取 $[t,t+\mathrm{d}t] \subset [\alpha,\beta]$, 曲线 Γ 在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 的部分绕 x 轴旋转所形成的立体可近似看做一个圆台 (图 7.6.12), 其侧面积为

$$\Delta S \approx \pi[y(t)+y(t+\mathrm{d}t)]\overline{M(t)M(t+\mathrm{d}t)},$$

其中 $M(t) = (x(t),y(t)), M(t+\mathrm{d}t) = (x(t+\mathrm{d}t), y(t+\mathrm{d}t))$. 当 $\mathrm{d}t$ 很小时, $\overline{M(t)M(t+\mathrm{d}t)} \approx \mathrm{d}L$, 其中 $\mathrm{d}L = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$ 是 Γ 的弧长微元, 而 $y(t+\mathrm{d}t) \approx y(t)$, 因此我们得到面积微元为

$$\mathrm{d}S = 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

对 t 从 α 到 β 积分即得所求侧面积:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

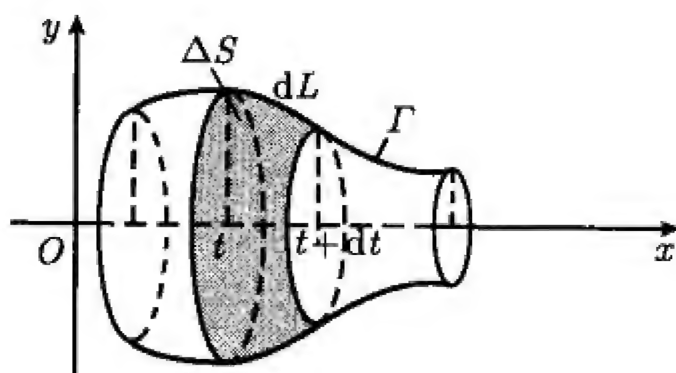


图 7.6.12

类似地, 我们可以给出曲线绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积公式.

对于在其他坐标下的曲线绕坐标轴旋转一周所得立体的侧面积公式, 请读者自己给出.

例 7.6.10 求圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上 x 介于 $[a,a+h]$(其中 $-R \leqslant a < a+h \leqslant R$) 的部分绕 x 轴旋转一周所形成的球台的体积及侧面积.

解　该球台可由曲线

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [a, a+h]$$

绕 x 轴旋转一周而成, 因此其体积

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_a^{a+h} (R^2 - x^2) \mathrm{d}x = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_a^{a+h} \\ =& \pi \left[R^2 h - \left(a^2 h + a h^2 + \frac{h^3}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

而该球台的侧面积为

$$\begin{aligned} S =& 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \mathrm{d}x \\ =& 2\pi R \int_a^{a+h} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \mathrm{d}x = 2\pi h R. \end{aligned}$$

注　在上述结果中, 令 $a = -R; h = 2R$, 则我们得到半径为 R 的球的体积为 $\frac{4\pi R^3}{3}$, 球面面积为 $4\pi R^2$. 另外, 我们还可看出球台的体积不仅依赖于球台的高, 而且还依赖于 a 的选取. 但它的侧面积则为球面上大圆周长与球台的高的乘积, 而与 a 的选取无关.

§7.7　定积分在物理学中的应用

定积分在物理学中有着广泛的应用. 在本节中, 我们主要讨论一些规则物体的质心、转动惯量的计算问题.

关于这些物理量的计算, 读者首先应该知道在有限个质点的情形下相应物理量的计算公式, 然后再根据定积分的定义来推导出其他形状物体的相应物理量的计算公式.

先来考虑质心坐标问题. 首先来复习一下物理学的有关概念. 设平面上有 n 个质点, 它们在平面内的位置为 $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $\cdots$,

$A_n(x_n,y_n)$, 在点 A_i 处的质点的质量为 $m_i\,(i=1,2,\cdots,n)$. 由物理学中的定义, 这 n 个质点关于 x 轴和 y 轴的**静力矩**分别为

$$M_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i \quad \text{和} \quad M_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i.$$

记 $M=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$ 为这 n 个质点的总质量, 则我们有以下的静力矩定律: 在上述条件下, 存在点 $A(\overline{x},\overline{y})$, 满足

$$M_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i=M\overline{y},\quad M_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i=M\overline{x}.$$

因此我们可得到以下结论: 这 n 个质点关于 x 轴 (y 轴) 的静力矩之和相当于一个位于在点 $(\overline{x},\overline{y})$ 处质量为 M 的质点关于 x 轴 (y 轴) 的静力矩. 因此 $A(\overline{x},\overline{y})$ 可以认为是这 n 个质点的**质心**, 其坐标由以下公式给出:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\quad \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}.$$

在物理学中, 我们还分别称

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i^2 \quad \text{与} \quad I_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i^2$$

为这 n 个质点关于 x 轴与 y 轴的**转动惯量**.

现在我们来求平面内一物质曲线的质心和关于坐标轴的转动惯量. 所谓物质曲线是一个理想的模型, 即平面 (或空间) 有一条光滑曲线 Γ, 它由参数方程 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出, 同时在 Γ 上有一个质量分布函数, 它由线密度 $\rho(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出, 其中 $\rho(t)\in C[\alpha,\beta]$.

由微元法, 任取 $[t,t+\mathrm{d}t]\subset[a,b]$, 则曲线弧长微元

$$\mathrm{d}L=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

因此得到质量微元

$$\mathrm{d}M = \rho(t)\mathrm{d}L = \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

从而整个曲线的质量为

$$M = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

另外, 由质点的静力矩的定义易知, 该物质曲线关于 x 轴及 y 轴的静力矩微元

$$\mathrm{d}M_x = \mathrm{d}M \cdot y(t), \quad \mathrm{d}M_y = \mathrm{d}M \cdot x(t),$$

从而 Γ 关于 x 轴和 y 轴的静力矩分别为

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

由此我们可以求出 Γ 的质心坐标 $(\overline{x}, \overline{y})$:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t},$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t}.$$

若在上面公式中, 特别地令 $\rho(t) \equiv 1$, 即曲线 Γ 具有均匀的质量分布, 则得到质心坐标

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t}{L},$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t}{L},$$

其中 L 是曲线 Γ 的长度.

特别地, 我们有

$$2\pi\overline{y}L = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t = S,$$

其中 S 是曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的侧面积. 因此上面的等式告诉我们, 一条曲线绕 x 轴旋转一周所成旋转体的侧面积等于该曲线长度与质心绕 x 轴旋转一周的周长的乘积. 这个结果也称为是**古鲁金**(Guldin)第一定理.

对于物质曲线 Γ 关于 x 轴和 y 轴的转动惯量, 我们用同样的方法可得到如下公式:

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

例 7.7.1 求圆周

$$x^2+(y-a)^2 = R^2(a > R > 0)$$

绕 x 轴旋转所成的轮胎体的表面积 (见图 7.7.1).

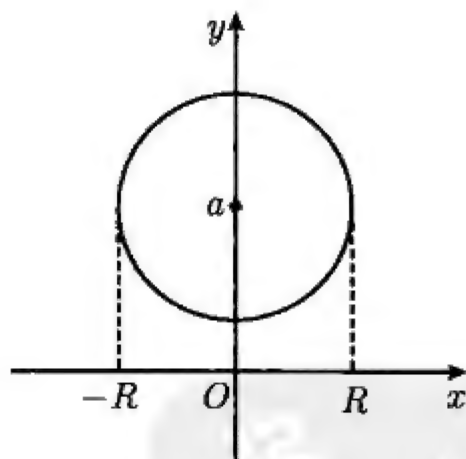


图 7.7.1

解 将该圆周看成线密度函数 $\rho \equiv 1$ 的质量曲线. 显然, 它的质心坐标为 $(0, a)$. 注意到圆的周长为 $L = 2\pi R$, 因此由古鲁金第一定理得其表面积为

$$S = L\cdot 2\pi\overline{y} = 2\pi R\cdot 2\pi a = 4\pi^2 Ra.$$

现在我们来考虑平面图形的质心问题. 设平面图形 S 由曲线 $y = y_1(x), y = y_2(x)(y_1(x) \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b)$ 及直线 $x = a, x = b$ 所围成, 并设该平面图形 S 的质量为均匀分布, 且假定其面密度函数为 1.

下面我们仍由微元法来求其质心坐标. 任取 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a, b]$, 则该图形 S 落在过点 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 并且与 x 轴垂直的直线之间的部分可近似看成一个小矩形, 从而质量微元为 $\mathrm{d}M = [y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x$, 质心坐标近似为 $\left(x, \dfrac{1}{2}[y_1(x) + y_2(x)]\right)$ (见图 7.7.2). 因此得到 S 关于 x 轴和 y 轴的静力矩微元分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_x &= \frac{1}{2}[y_2(x) + y_1(x)][y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}[y_2^2(x) - y_1^2(x)]\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}M_y &= x[y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

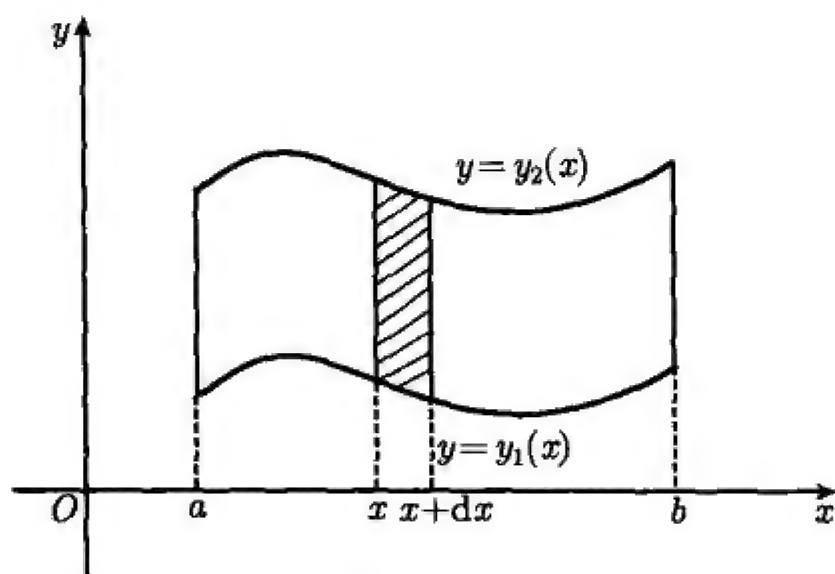


图 7.7.2

对 x 从 a 到 b 积分即得到整个图形 S 关于 x 轴和 y 轴的静力矩分别为

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\mathrm{d}x, \\ M_y &= \int_a^b x[y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到 S 的总质量为

$$M = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\mathrm{d}x,$$

因此该图形 S 的质心坐标为

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\displaystyle\int_a^b x[y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x},$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x}.$$

由上面关于 $\overline{y}$ 的计算公式可得

$$\begin{aligned}2\pi\overline{y}S&=2\pi\overline{y}\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\mathrm{d}x\\&=\pi\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\mathrm{d}x=V.\end{aligned}$$

其中 S 是该图形的面积, V 是该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积. 上述公式表明一个平面图形绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积等于该平面图形的面积与以质心到 x 轴距离为半径的圆周长的乘积. 这个结果也称为**古鲁金第二定理**.

例 7.7.2 求半径为 $R>0$ 的半圆盘的质心.

解 如图 7.7.3 建立坐标系. 设半圆盘的质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$, 由对称性显然有 $\overline{x}=0$. 下面求 $\overline{y}$. 注意到该图形绕 x 轴旋转一周得到一个

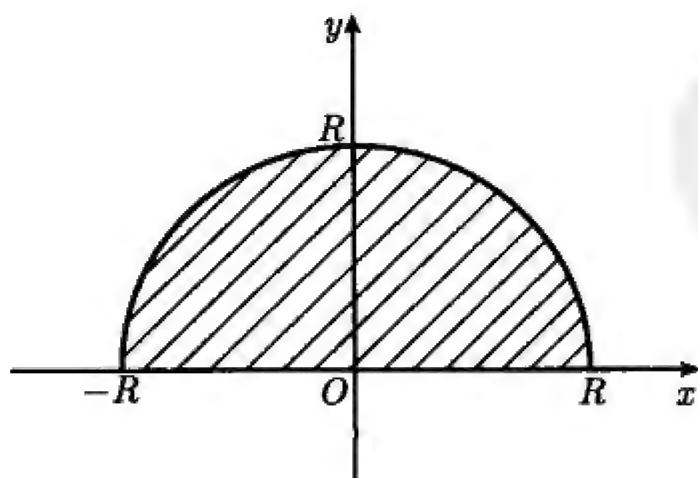


图 7.7.3

球体, 利用古鲁金第二定理有

$$2\pi\overline{y}\cdot\frac{\pi}{2}R^2=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

解上述方程得 $\overline{y}=\dfrac{4}{3\pi}R$, 因此圆盘质心为 $\left(0,\dfrac{4}{3\pi}R\right)$.

下面我们举一个例子来讨论极坐标方程表示的物质曲线转动惯量的计算.

例 7.7.3 设平面质量曲线为 $r=r(\theta)\,(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$, 线密度为 $\rho\equiv 1$, 求该曲线关于极轴的转动惯量.

解 任取 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]\subset(\alpha,\beta)$, 则由转动惯量的定义, 曲线上位于 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 上的弧段质量微元为 $\mathrm{d}M=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$. 这小段质量弧到极轴的距离近似为 $r(\theta)\sin\theta$ (见图 7.7.4), 它关于极轴的转动惯量, 即转动惯量微元为

$$\mathrm{d}I=r^2(\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}M,$$

因此所求曲线关于极轴的转动惯量为

$$I=\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\sin^2\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

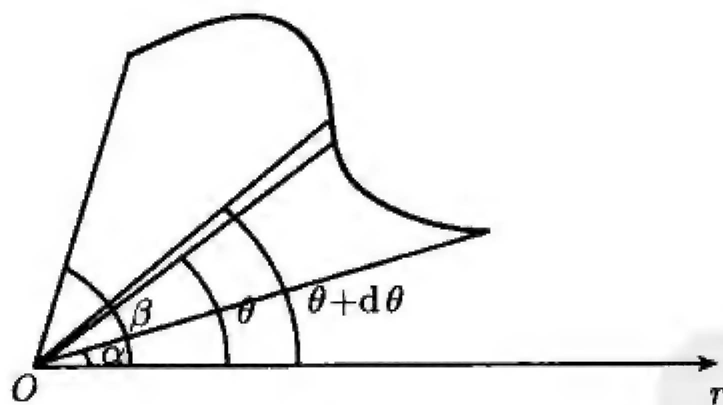


图 7.7.4

习 题 七

1. 从定义出发计算定积分 $\displaystyle\int_0^T(\alpha+\beta t)\mathrm{d}t$, 这里 α,β 是常数.

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则它的定积分必是唯一的.

3. 利用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2+\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$.

4. 设序列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}=1\ (\alpha>0)$，用定积分求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

5. 设函数 $f(x)\in R[a,b]$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义且在 $[a,b]$ 上只在有限多个点的值与 $f(x)$ 不同，证明：$g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，证明 $f(x)\in R[a,b]$ 的充分必要条件是：存在 $I\in\mathbb{R}$，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，对任取的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义；记 $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$. 证明：$f(x)\in R[a,b]$ 的充分必要条件是 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

8. 设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$，记 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为区间 $[a,b]$ 的分割，$\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$，并任取 $\xi_i,\eta_i\in$

$[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 证明:

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\eta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 且存在 $\alpha > 0$, 使得对于 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) \geqslant \alpha$. 试证明:

(1) $\dfrac{1}{f(x)} \in R[a, b]$; (2) $\ln f(x) \in R[a, b]$.

10. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 试证明: $f(x) \in R[a, b]$ 的充分必要条件是: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$:

(1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \in [a, b]$;

(2) $\displaystyle\int_a^b [h(x) - g(x)] \mathrm{d}x < \varepsilon$.

11. 设函数 $g(x) \in R[a, b], f(u) \in C[A, B]$, 这里 A, B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的下、上确界. 证明 $f(g(x))$ 在 $[a, b]$ 上可积.

12. 设函数 $f(x) \in R[a, b]$, 证明: 存在点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 并且它在 $[a, b]$ 上的不连续点集只有有限多个聚点. 证明 $f(x) \in R[a, b]$.

14. 证明 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在任何闭区间上可积.

15. 设函数 $f(x) \in R[a, b]$, 并且对于 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) > 0$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x > 0$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且在任何有限闭区间可积. 证明: 对于任何闭区间 $[a, b]$, 有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

17. 确定下列定积分的符号:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x(\sin x)^{2n+1}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

18. 设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, 证明如下的柯西–施瓦茨不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

19. 证明下列极限成立:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=0$;

(2) 设函数 $f(x)\in C[-1,1]$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0).$$

20. 试找出区间 $[0,1]$ 上满足以下条件的所有连续函数: 对于 $\forall x\in(0,1)$, 有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

21. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数, 证明:

(1) 对任意的 $x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

(2) 当 $f(a)\neq f(b)$ 时, (1) 中成立严格不等式.

22. 设函数 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ 且 $f'(0)$ 存在, 再设对于 $\forall x\in$

$(-\infty,+\infty)$, $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}xf(x)$. 证明：$f(x)\equiv cx$, 其中 $c\in\mathbb{R}$ 为常数.

23. 设 $P_n(x)$ 为 $n\geqslant 1$ 次多项式, $[a,b]$ 是任一闭区间. 证明

$$\int_a^b |P_n'(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2n\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|P_n(x)|\}.$$

24. 设函数 $f(x)\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明：

(1) $\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$;

(2) 若 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$, 则

$$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b [xf(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}.$$

25. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\int_0^x (\sin t)^\alpha\mathrm{d}t}{x^{1+\alpha}}$ $(\alpha>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^\alpha}\mathrm{d}t}{x^{1-\alpha}\mathrm{e}^{x^\alpha}}$ $(\alpha>0)$.

26. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; (2) $\int_0^2|1-x^2|\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$ $(a>0)$; (4) $\int_0^1\sqrt[n]{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$; (8) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$; (10) $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$; (12) $\int_0^2 \mathrm{sgn}(1-x)\mathrm{d}x$;

(13) $\int_1^{1+n} \ln[x]\mathrm{d}x$; (14) $\int_0^1 \tan^{2n} x\mathrm{d}x$;

(15) $\int_0^{\pi} x^2\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x$; (16) $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$.

27. 求下列定积分:

(1) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$, 这里 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$

(2) $\int_0^{8\pi} |\sin x|\mathrm{d}x$.

28. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 并且 $f(x)\in R[0,2\pi]$. 证明:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

29. 设函数 $f(x)\in C[-1,1]$, 证明:

(1) $\int_0^{2\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

30. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, $g(x)\in C[a,b]$ 且不变号, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

31. 证明: 对于 $\forall x>0$, 存在唯一的 $\xi_x>0$, 使得 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^{\xi_x{}^2}$ 成立; 并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x}$.

32. 利用定积分第一中值定理证明以下不等式:

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}(1+\alpha)}\leqslant\int_0^1\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{(1+\alpha)}$ $(\alpha>0)$;

(2) $\dfrac{\pi^2}{64} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2\tan^2 x} < \dfrac{\pi^2}{32}$.

33. 利用定积分第二中值定理证明:

(1) $\left|\displaystyle\int_a^b \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| < \dfrac{2}{a}\ (0<a<b)$;

(2) $\left|\displaystyle\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{1}{a}\ (0<a<b)$.

34. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上单调下降, 证明: 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x \geqslant 0$;　　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\mathrm{d}x \leqslant 0$.

35. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 记 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

36. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并且满足 $f(1)=2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=f'(\xi)$.

37. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, $g(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数, 并且 $\displaystyle\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$. 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

38. 求由下列曲线所围成平面图形的面积:

(1) $x=y^2, y=x^2$;

(2) $y=\sin x, y=\cos x, x=0, x=2\pi$;

(3) $y^2=x^2(1-x^2)$;

(4) $y^2=x, x^2+y^2=1$ (在第一、四象限的部分).

39. 设 $p>0$ 和 $q>0$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 证明: 对于任何非负实

数 a, b, 成立不等式 $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, 并且上述不等式中等号成立的充分必要条件是 $a = b$.

40. 求由下列曲线所围成平面图形的面积:

(1) 旋轮线 (拱线)$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$ 与 x 轴;

(2) 圆的渐伸线 $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$ 与直线 $x = a$;

(3) 椭圆的渐屈线 $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t\,(c^2 = a^2 - b^2 > 0)$.

41. 求由下列曲线所围成平面图形的面积 (其中参数 $a > 0$):

(1) 双纽线 $r^2 = a\cos 2\theta$;　　(2) 三叶线 $r = a\sin 3\theta$;

(3) 笛卡儿叶形线 $r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$.

42. 求由下列曲线所围成平面图形的面积:

(1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$;　　(2) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$;

(3) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = 1$;

(4) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$;　　(5) $x^2 + axy + y^2 = 1(|a| < 1)$.

43. 分别求出抛物线 $y = x^2(0 \leqslant x \leqslant h)$ 与 $y = 0, x = h$ 所围平面图形绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

44. 求由曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 与平面 $z = h$ 所围成的立体的体积.

45. 设空间立体的底面是一个半径为 1 的圆盘, 并且存在该圆盘的一条直径使得该立体的垂直于该直径的所有截面都是等边三角形, 求该立体的体积.

46. 求出球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ 和柱体 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$ 公共部分的体积.

47. 求心形线的一段 $r = a(1 + \cos\theta)\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和极

轴所围图形绕极轴旋转一周所得立体的体积.

48. 证明：极坐标下曲线 $r=r(\theta)$ 与 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ (这里 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$) 所围的平面图形绕极轴旋转一周所得立体的体积是

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}r^{3}(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

49. 求下列曲线的弧长：

(1) **星形线** $x=a\cos^{3}t, y=a\sin^{3}t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) **阿基米德螺线** $r=a\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$;

(3) **抛物线** $y=ax^{2}\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$;

(4) **圆的渐伸线** $x=a\,(\cos t+t\sin t), y=a\,(\sin t-t\cos t)\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$.

50. 证明：曲线 $r=a\sin\dfrac{\theta}{n}(0\leqslant\theta\leqslant n\pi)$ 的弧长为

$$L=\begin{cases}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & n=2k,\\[2mm] \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & n=2k+1.\end{cases}$$

51. 求下列曲线绕 x 轴旋转一周所得曲面的侧面积：

(1) $y^{2}=2px\,(0\leqslant x\leqslant 1)$;　　(2) $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1$;

(3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;　　(4) $y=\sin x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$;

(5) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(6) $y=a\cosh\dfrac{x}{a}, |x|\leqslant b$.

52. 求下列曲线绕极轴旋转一周所得曲面的侧面积：

(1) 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$;　　(2) 双纽线 $r^{2}=a^{2}\cos 2\theta$.

53. 设圆盘的半径为 1, 其面密度 $\rho\equiv 1$. 求该圆盘关于过圆心且垂直于该圆盘的直线的转动惯量.

54. 求半圆周 $y=\sqrt{R^{2}-x^{2}}\,(|x|\leqslant R)$ 的质心坐标和关于两坐标轴的转动惯量.

55. 求锥体 $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant h$ 的质心坐标和关于 z 轴的转动惯量.

56. 设空间物质线段 Γ_{AB} 的线密度为 1, 长度为 1 并且与直线 Γ 不交, a 与 b 分别是 Γ_{AB} 的端点 A 与 B 到 Γ 的距离. 求 Γ_{AB} 关于 Γ 的转动惯量.

57. 设半径为 1 的球体刚好一半浸入比重为 1 的水中, 求将该球从水中取出所需做的功.

第八章　广 义 积 分

在定积分中讨论的函数必须是定义在有限区间上的有界函数，在本章中我们将定积分作两个方面的推广：一是将有限区间推广到无穷区间，二是将有界函数推广到无界函数．对于前者的积分，我们称之为**无穷积分**，而将后者的积分称为**瑕积分**．通常将无穷积分和瑕积分统称为**广义积分**．

§8.1　无穷积分的基本概念与性质

在本节中我们研究无穷积分．首先我们来考查一个火箭升空的例子．假设人们在地球上某个地方向天空发射一个质量为 m 的火箭，其目的是探索太阳系中某个遥远的星球．设地球半径为 R，质量为 M，则由万有引力定律知，火箭从地球表面发射升至高度 X，它克服地球引力所做的功为

$$W(X)=\int_R^{R+X} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r,$$

其中 $G=\dfrac{R^2g}{M}$，而 g 为大家熟悉的重力加速度，即 $g\approx 9.8\mathrm{m/s^2}$．对任意固定的 X，我们有

$$W(X)=mgR^2\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+X}\Big).$$

火箭逐步摆脱地球引力的过程可以看成是 $X\to+\infty$ 的变化过程．因此，从理论上来看，火箭要摆脱地球引力所做的功应该为

$$\lim_{X\to+\infty}W(X)=\lim_{X\to+\infty}\int_R^{R+X} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \lim_{X\to+\infty} mgR^2\Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+X}\Big) = mgR.$$

利用上述分析，我们可以求出所谓的第二宇宙速度，即火箭具有的最小初速度，使得它能够飞离地球的引力范围. 事实上，设火箭向上发射时的初速度为 v_0，它得到的动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$. 当它超过 $\lim\limits_{h\to+\infty} W(h) = mgR$ 时，则火箭可以脱离地球的引力. 因此由能量守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR,$$

取 $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$,$R = 6371$ km，代入得

$$v_0 \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

现在我们只关注火箭在升空的过程中克服地球引力做功所涉及的积分问题. 在火箭达到的每一个高度 X，我们都面临一个有限区间的积分 $\int_R^X G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$，该积分对固定的 X 是一个定积分，但由于 X 不断变大，实际我们将面临的是考查当 $X\to+\infty$ 时，积分 $\int_R^X G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$ 的变化趋势. 我们把这个考查过程记为 $\int_R^{+\infty} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$，并称之为无穷积分. 为此给出下面的定义.

定义 8.1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，并且对于 $\forall X\in(a,+\infty)$，在 $[a,X]$ 上可积. 如果极限

$$\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称**无穷积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，或称函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上**可积**，并记

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\mathrm{d}x;$$

如果极限 $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\mathrm{d}x$ 不存在, 则称**无穷积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

从上述定义可以看出: 记号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 仅代表了我们考虑 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分这件事情, 只有当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, 它才是一个有限实数.

类似地我们也可以讨论一个函数在 $(-\infty,b]$ 上的积分问题.

定义 8.1.2 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有定义, 并且对于 $\forall X\in(-\infty,b)$, 在区间 $[X,b]$ 上可积. 如果极限

$$\lim_{X\to-\infty}\int_X^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 则称**无穷积分** $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**, 或称函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上**可积**, 并记

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{X\to-\infty}\int_X^b f(x)\mathrm{d}x;$$

如果极限 $\lim\limits_{X\to-\infty}\int_X^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在, 则称**无穷积分** $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

定义 8.1.3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且在任何的闭区间 $[a,b]$ 上可积. 任取 $c\in\mathbb{R}$, 若无穷积分 $\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, 则称**无穷积分** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**, 并记

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x;$$

若无穷积分 $\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 中至少有一个发散, 则称**无穷积分** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

由于我们在定义 8.1.3 中假定了 $f(x)$ 在任何有限闭区间均可积, 读

者易于验证, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与否与 c 的选取无关; 当 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, 其值也与 c 的选取无关.

由无穷积分敛散性的定义我们可以看出: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有原函数 $F(x)$, 并形式地记 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a).$$

同样, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有原函数 $G(x)$, 记 $G(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = G(x)\Big|_{-\infty}^{b} = G(b)-G(-\infty).$$

类似地, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有原函数 $H(x)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = H(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = H(+\infty)-H(-\infty).$$

上述的公式给出了判定无穷积分是否收敛以及计算收敛无穷积分的值的方法.

由定积分几何意义, 不难理解无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义. 例如, 当 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的连续函数时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是图 8.1.1 中阴影部分面积的代数和.

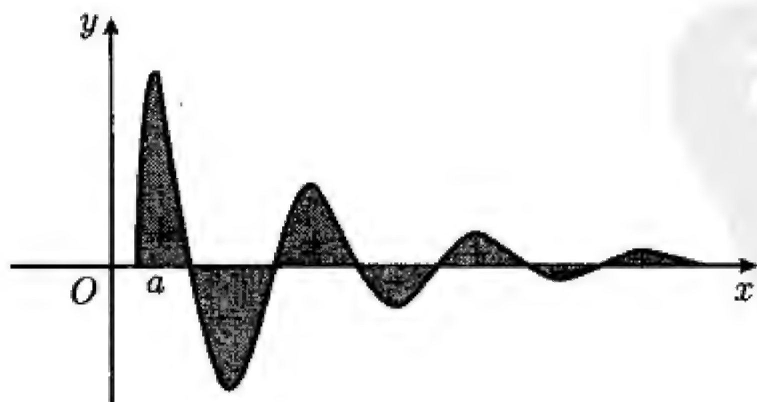


图 8.1.1

例 8.1.1　证明无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛并求其值.

解　由于 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数, 因此我们有

$$\lim_{X\to-\infty}\int_X^0\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=0-\lim_{X\to-\infty}\arctan X=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{X\to+\infty}\arctan X=\frac{\pi}{2}.$$

由无穷积分的定义知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 收敛, 并且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

例 8.1.2　讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 的敛散性, 其中 $p\in\mathbb{R}$.

解　当 $p=1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\ln x\Big|_1^X$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty;$$

当 $p\neq1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{X\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_1^X$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{X^{-p+1}-1}{1-p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

因此无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant1$ 时发散.

例 8.1.3 讨论无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$ 的敛散性, 其中 $p\in\mathbb{R}$.

解 当 $p=1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}&=\lim_{X\to+\infty}\int_2^X\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\\&=\lim_{X\to+\infty}(\ln\ln X-\ln\ln 2)=+\infty.\end{aligned}$$

当 $p\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}&=\lim_{X\to+\infty}\int_2^X\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\lim_{X\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-p+1}x}{1-p}\right|_2^X\\&=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln^{1-p}X-\ln^{1-p}2}{1-p}=\begin{cases}\dfrac{1}{(p-1)\ln^{p-1}2}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

类似地, 我们可以证明: 无穷积分

$$\int_{\mathrm{e}^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$$

当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

从无穷积分的定义出发, 我们可以容易地证明下面的关于无穷积分的换元公式与分部积分公式.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且对于 $\forall X>a$, 在区间 $[a,X]$ 上可积, 再设函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta)$(β 可以是 $+\infty$) 上连续可微, 严格单调上升, 并且满足

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)\leqslant\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty,$$

则我们有以下的换元公式:

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注 上述等式是在以下意义下成立的：当等式两端的积分有一个收敛时，则另一个积分也收敛并且上述等式必成立；若上面的两个积分中有一个发散，则另外一个积分也发散. 以下若有两个无穷积分相等的等式，则读者均可按上述意义来加以理解. 另外，对 $\varphi(t)$ 是单调下降的情形，请读者给出相应的换元公式.

现设函数 $u(x), v(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微，且极限

$$u(+\infty)v(+\infty) \triangleq \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$$

存在，则有以下分部积分公式

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

读者可类似地给出无穷积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的换元公式与分部积分公式.

例 8.1.4 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则原积分可化为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

从上例可知，一个无穷积分经过换元后有时可变成一个定积分.

例 8.1.5 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$.

解 取 $u(x)=\arctan x, v(x)=-\frac{1}{2x^2}$，则利用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x &= \frac{-\arctan x}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2(1+x^2)} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{x} - \arctan x\Big)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 8.1.6 计算无穷积分

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \mathrm{d}x, \quad \text{其中} a > 0.$$

解 在下一节中, 我们将知道以上无穷积分是收敛的. 现在我们来求其值:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{a} \int_0^X \sin bx \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax}) \\
&= -\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{a} \left(\mathrm{e}^{-ax} \sin bx \Big|_0^X - b \int_0^X \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{b}{a} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \mathrm{d}x = \frac{b}{a} I_2, \\
I_2 &= -\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{a} \int_0^X \cos bx \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax}) \\
&= -\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{a} \left(\mathrm{e}^{-ax} \cos bx \Big|_0^X + b \int_0^X \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{b}{a} I_1.
\end{aligned}$$

由以上两式可得

$$I_1 = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad I_2 = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

回忆一下, 我们说无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛是指关于 X_1 和 X_2 的极限 $\lim\limits_{\substack{X_1 \to -\infty \\ X_2 \to +\infty}} \int_{X_1}^{X_2} f(x) \mathrm{d}x$ 存在, 其中关于 X_1 和 X_2 的极限过程是两个独立的过程. 如果仅考虑 $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} f(x) \mathrm{d}x$, 则当它收敛时, 我们称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 在**柯西主值意义下是收敛的**, 此时我们用

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

来表示极限 $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_{-X}^{X} f(x)\mathrm{d}x$, 同时称该极限值为积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的**柯西主值**. 显然, 对任何 $(-\infty,+\infty)$ 上可积的奇函数 $f(x)$, 有

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

从某种意义上来说, 当讨论无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性问题时, 我们必须讨论两个独立的极限过程. 而讨论该无穷积分的柯西主值时, 我们只要讨论一个极限过程. 无穷积分的柯西主值在一些数学分支中有应用.

§8.2　无穷积分敛散性的判别法

在对无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的讨论中, 我们假定了函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的有限子区间上都是可积的, 而要研究的 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性问题, 实际上就是研究当 $X\to+\infty$ 时连续函数 $F(X)=\int_{a}^{X} f(x)\mathrm{d}x$ 的极限是否存在的问题. 因此从理论上讲, 无穷积分的敛散性可以认为是已经解决的问题. 但是人们很快就发现, 对于许多的函数 $f(x)$, 相应的 $F(X)$ 并不能容易求出, 因此我们要寻找直接从被积函数的性质来判定广义积分是否收敛的方法.

下面我们主要讨论 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性问题, 关于 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性, 请读者自己给出相应的结论.

首先由无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的定义, 我们容易得到下面的柯西准则.

定理 8.2.1 (柯西准则) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 对于 $\forall X > a$, 在区间 $[a,X]$ 上可积, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > a$, 当 $X'' > X' > M$ 时, 有

$$\left|\int_{X'}^{X''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

此定理的证明可以从无穷积分敛散性的定义直接推出, 故省略.

定义 8.2.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 对于 $\forall X > a$, 在区间 $[a,X]$ 上可积. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**; 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,但无穷积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散, 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

定理 8.2.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 对于 $\forall X > a$, 在区间 $[a,X]$ 上可积. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.

证明 假设 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 由柯西准则, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > a$, 当 $X'' > X' > M$ 时, 有

$$\left|\int_{X'}^{X''} |f(x)|\mathrm{d}x\right| = \int_{X'}^{X''} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因此, 当 $X'' > X' > M$ 时, 有

$$\left|\int_{X'}^{X''} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{X'}^{X''} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

再由柯西准则知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证毕.

从上述定理知, 无穷积分是否绝对收敛的问题可以转化为非负函数的无穷积分的敛散性问题.

定理 8.2.3 设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$上有定义, 对于 $\forall X>a$, 在 $[a,X]$ 上可积, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 存在 $A>0$, 使得对一切 $X\geqslant a$, 有

$$\int_a^X f(x)\mathrm{d}x\leqslant A.$$

证明 事实上, 由定积分关于积分区间的可加性及 $f(x)\geqslant 0$ 知, $F(X)=\int_a^X f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上是 X 的单调上升函数. 因此由单调有界定理即可推出定理 8.2.3. 证毕.

对于非负函数的无穷积分, 我们有下面的比较定理.

定理 8.2.4 设非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且对于 $\forall X>a$, 在 $[a,X]$ 上可积. 若存在常数 $c_1>0,c_2>0$ 及 $M_0\geqslant a$, 使得当 $x\geqslant M_0$ 时, 成立不等式

$$c_1f(x)\leqslant c_2g(x),$$

则我们有下述结论:

(1) 若 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明 我们只证 (1), (2) 的证明留给读者.

由假设 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 根据柯西准则, 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M_1>0$, 当 $X''>X'>M_1$ 时, 有

$$\int_{X'}^{X''}g(x)\mathrm{d}x<\frac{c_1}{c_2}\varepsilon.$$

由于当 $x \geqslant M_0$ 时, 有

$$f(x) \leqslant \frac{c_2}{c_1} g(x),$$

因此我们取 $M = \max\{M_0, M_1\}$, 当 $X'' > X' > M$ 时, 有

$$0 \leqslant \int_{X'}^{X''} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{c_2}{c_1} \int_{X'}^{X''} g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(1) 得证. 证毕.

推论 设非负函数 $f(x), g(x)(g(x) \neq 0)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 且对于 $\forall X > a$, 在区间 $[a, X]$ 上可积. 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, 则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l = 0$ 时, 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述推论可由极限的保号性和定理 8.2.4 推出.

显然, 对两个非负函数的无穷积分, 以上定理和推论告诉我们, 取值大的函数的无穷积分收敛, 则取值小的函数的无穷积分也收敛; 反之取值小的函数的无穷积分发散, 则取值大的函数的无穷积分也发散.

在判断一些无穷积分的敛散性时, 我们有一些“标准函数”, 其他的一些函数可与它们作比较. 这些“标准函数”有 $\dfrac{1}{x^p}$, $\dfrac{1}{x^p \ln^q x}$, e^{-ax} 等. 读者应该熟悉这些函数中参数取哪些值是使得无穷积分收敛的,而哪些值是使得无穷积分发散的. 例如, 在 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$ 中, 当 $p > 1$ 时, 对任意的 $q \in \mathbb{R}$, 无穷积分收敛; 而当 $p = 1$ 时, 对于 $q > 1$ 收敛, 对于其他的情形该无穷积分均发散. 再如, 在 $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 中 (其

中 $P(x)$ 是一个多项式), 当 $a>0$ 时, 无穷积分是收敛的.

在上节例 8.1.6 中, 由于被积函数在 $[0,+\infty)$ 上满足 $|e^{-ax}\sin bx|\leqslant e^{-ax}$ 和 $|e^{-ax}\cos bx|\leqslant e^{-ax}$, 因此 $I_1=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$ 与 $I_2=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$ 均是绝对收敛的.

例 8.2.1 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^n+x^2+1}\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 n 为一正整数.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^n+x^2+1}}{\dfrac{1}{x^{n-2}}}=1,$$

而当 $n-2>1$, 即 $n>3$ 时, $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^{n-2}}\mathrm{d}x$ 收敛, 因此当 $n>3$ 时, 原无穷积分收敛; 而当 $n\leqslant 3$ 时, 无穷积分发散.

若一个有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为两个既约多项式, 它们的次数分别为 m,n, 则 $\int_a^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是 $n-m\geqslant 2$. 对于有理函数的无穷积分, 虽然我们很容易判断其收敛性, 但计算其值并不容易. 在复变函数课程中我们有系统的办法来求其值.

例 8.2.2 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x\sin\dfrac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由于

$$\left|\frac{\cos x\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x},\quad x\geqslant 1,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=1,$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

例 8.2.3 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^p}-\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\right]\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

解 在 $\ln(1+t)$ 的麦克劳林展式中令 $t=\frac{1}{x^p}$, 我们有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\quad(x\to+\infty),$$

从而有

$$0\leqslant\frac{1}{x^p}-\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)=\frac{1}{2x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\sim\frac{1}{2x^{2p}}\quad(x\to+\infty).$$

因此, $\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^p}-\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)\right]\mathrm{d}x$ 当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.

以上我们讨论了非负函数无穷积分的敛散性问题. 正如我们所指出的那样, 这些判别法则可以用来判定无穷积分是否绝对收敛. 值得注意的是, 当 $f(x)\geqslant 0$ 时, 由 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义来看, 似乎当 x 越大时, $f(x)$ 的值要很小时才能保证无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性. 当 $f(x)$ 不连续时, 我们容易看出这个想法是不对的, 这可以从以下事实得到验证. 取严格单调上升序列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 由于改变 $f(x)$ 在 $\{x_n\}$ 上的取值并不改变 $f(x)$ 在任何区间的可积性, 因此我们可以使得 $f(x)$ 在该序列的值改变后的函数在这一序列上的值趋于 ∞. 即使 $f(x)$ 是连续的,我们也容易构造出一个在 $[a,+\infty)$ 上无界的函数 $f(x)$, 使得广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 8.2.4　设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\in[1,x_2'],\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\in[x_n',x_{n+1}],\\ f(x_{n+1})+3^{n+1}[2^{n+1}-f(x_{n+1})](x-x_{n+1}), & x\in(x_{n+1},n+1],\\ 2^{n+1}-3^{n+1}[2^{n+1}-f(x_{n+1}')](x-n-1), & x\in(n+1,x_{n+1}'],\end{cases}$$

其中 $x_n=n-\dfrac{1}{3^n}, x_n'=n+\dfrac{1}{3^n}, n=2,3,\cdots$ ($f(x)$ 的大致图像如图 8.2.1 所示), 证明无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

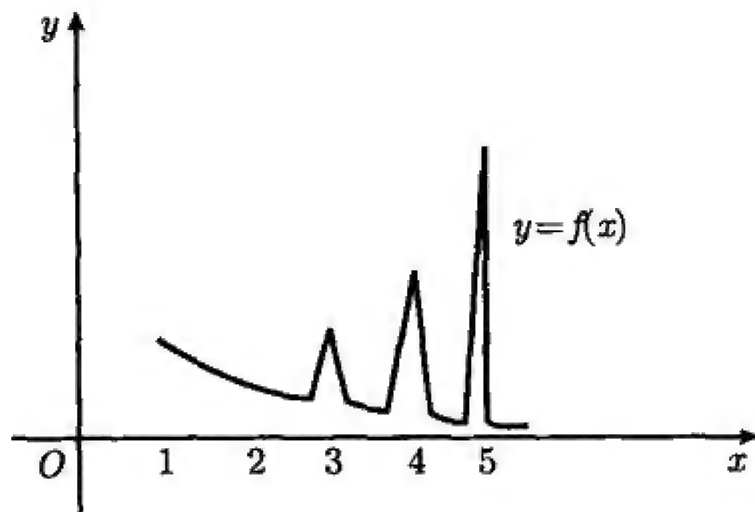


图　8.2.1

证明　从 $f(x)$ 的构造可以看出 $f(x)>0(x\in[1,+\infty))$, $f(x)\in C[1,+\infty)$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=+\infty$. 对于 $\forall X>1$, 取正整数 $N>X$, 则有

$$\begin{aligned}\int_1^X f(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_1^N f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^N\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\sum_{n=2}^N\int_{x_n}^{x_n'}f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant 1+\sum_{n=2}^N\int_{x_n}^{x_n'}2^n\mathrm{d}x<1+2\sum_{n=2}^N\frac{2^n}{3^n}<4.\end{aligned}$$

因此无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

作为练习, 读者可以证明: 当 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调时, 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

现在我们转向讨论条件收敛的无穷积分. 对于这类无穷积分, 被积函数 $f(x)$ 的绝对值的无穷积分趋于 $+\infty$. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 取值必须在 x 轴的两侧波动, 使得其图像与 x 轴所围的图形在 x 轴的上面与下面的面积不断抵消,才能使得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 在此方面我们有以下两个有用的判别法.

定理 8.2.5 (狄利克雷判别法) 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且满足下面两个条件:

(1) 对于 $\forall X>a, f(x)$ 在区间 $[a,X]$ 上可积, 并且 $\exists M>0$, 使得对于 $\forall X>a$, 有

$$\left|\int_a^X f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M;$$

(2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\exists X>0$, 当 $x>X$ 时, 有

$$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

对于任意的 $X''>X'>X$, 由条件 (1) 和 (2), 我们可以对定积分 $\int_{X'}^{X''} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 应用定积分第二中值定理, 从而在 (X',X'') 内存在 ξ, 使得

$$\begin{aligned}\left|\int_{X'}^{X''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|g(X')\int_{X'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(X'')\int_{\xi}^{X''} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4M}\left\{\left|\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{X'} f(x)\mathrm{d}x\right|\right.\end{aligned}$$

$$+\left|\int_a^{X''} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|\Bigg\}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}4M = \varepsilon.$$

由柯西准则我们知无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证毕.

定理 8.2.6 (阿贝尔判别法)　设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 并且满足下面两个条件:

(1) 对于 $\forall X > a, f(x)$ 在 $[a, X]$ 上可积, 并且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界,

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明　由条件 (2) 我们知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 存在, 设该极限值为 B. 容易验证 $f(x)$ 和 $G(x) = g(x) - B$ 满足狄利克雷判别法(定理 8.2.5) 的所有条件, 从而 $\int_a^{+\infty} f(x)G(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 由

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)G(x)\mathrm{d}x + B\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

即知定理结论成立. 证毕.

例 8.2.5　证明无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

解　注意到被积函数为偶函数以及

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 因此我们只要证明无穷积分 $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛即可.

对于 $\forall X > 2\pi$, 我们有

$$\left|\int_{2\pi}^{X} \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos 2\pi - \cos X| < 2,$$

又由于 $\frac{1}{x}$ 在 $[2\pi,+\infty)$ 上单调下降且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 由狄利克雷判别法知 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

由于

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos x}{2x},$$

类似上面讨论, 我们可证 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛. 由于 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ 发散, 因此 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 再由比较判别法知 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 因此无穷积分 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

从此例子可以清楚地看出, 当 x 充分大时, 由 $\sin x$ 的周期性, 对曲线 $y=\frac{\sin x}{x}$ 与 x 轴所围的每一小块的面积 $A_i(i=1,2,\cdots)$(见图 8.2.2), 有

$$A_1 > A_2 > A_3 > \cdots,$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$. 由于 x 轴上面小块与下面小块的面积不断抵消, 所以 $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

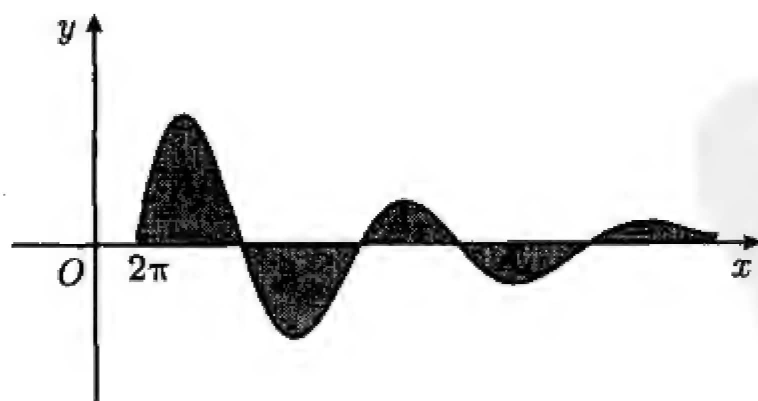


图 8.2.2

另外, 在不定积分中我们知道 $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示, 因此对 $-\infty < a < b < +\infty$, 定积分 $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 就很难计算出来. 但以后我们可以用多种方法求出 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的值. 类似的例子还有 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 等.

例 8.2.6 试讨论 $I = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^p}\right)\mathrm{d}x (p > 0)$ 的敛散性.

解 由

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (t \to 0)$$

知

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^p}\right) &= \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\\ &= \frac{\sin x}{x^p} + \frac{\cos 2x}{4x^{2p}} - [1 - o(1)]\frac{1}{x^{2p}} \quad (x \to +\infty).\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}I &= \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^p}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{4x^{2p}}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} [1 - o(1)]\frac{\mathrm{d}x}{2x^{2p}}\\ &\triangleq I_1 + I_2 - I_3,\end{aligned}$$

当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 由狄利克雷判别法知 I_1 和 I_2 收敛, 而注意到此时 I_3 发散, 因此 I 发散; 当 $1 \geqslant p > \frac{1}{2}$ 时, I_1 条件收敛, 而 I_2 和 I_3 绝对收敛, 因此 I 条件收敛; 当 $p > 1$ 时, I_1, I_2 和 I_3 均绝对收敛, 从而 I 绝对收敛.

注 注意到对所有的 $p > 0$, 我们都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^p}\right)}{\frac{\sin x}{x^p}} = 1$. 此例说明若被积函数不保号时, 不能用比较判别法来确定它是否收敛.

§8.3 瑕 积 分

8.3.1 瑕积分的概念

正如我们在本章开始所指出的, 定积分的第二个推广是研究在有限区间上无界函数的积分问题. 回忆一下, 在研究函数可积性时, 我们知道

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是函数

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0 & x=0\end{cases}$$

的一个原函数. 函数 $f(x)$ 是无界的, 因此它在包含 $x=0$ 的任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积, 但此时函数 $f(x)$ 却有一个有界的原函数. 在本节中, 我们希望研究此类函数的积分问题. 我们称这函数的积分为**瑕积分**. 因为 $f(x)$ 仅仅在 $x=0$ 附近无界, 所以 $x=0$ 也称为 $f(x)$ 的一个**瑕点**. 下面我们称 x_0 是 $f(x)$ 的一个瑕点即是指 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心 (左或右) 邻域内有定义, 但在该去心 (左或右) 邻域内无界.

首先我们讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上只有一个瑕点的情形.

定义 8.3.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上有定义, a 是 $f(x)$ 的一个瑕点. 若对于 $\forall 0<\delta<b-a$, $f(x)$ 在区间 $[a+\delta,b]$ 上可积, 且极限

$$\lim_{\delta\to 0+0}\int_{a+\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x \tag{8.3.1}$$

存在, 则称**瑕积分** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**, 并记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0+0}\int_{a+\delta}^{b}f(x)\mathrm{d}x;$$

若极限 (8.3.1) 不存在, 则称**瑕积分** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

如果 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点, 我们可以类似定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0+0}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $c\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一瑕点时, 我们称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛是指瑕积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛. 此时, 我们还可类似地定义柯西主值意义下的收敛 (请读者给出).

当 a 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的唯一瑕点时, 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的一个原函数, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 可由下式计算出:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0+0}\int_{a+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{\delta\to 0+0} F(a+\delta).$$

例如, 对于前面的例子我们有

$$\int_0^1 \left(2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0+0} x^2\sin\frac{1}{x^2}\Big|_\delta^1 = \sin 1.$$

以上的分析实际上给了我们计算瑕积分的一个方法. 对于瑕积分, 我们也有相应的换元公式与分部积分公式, 这些公式请读者自己给出.

例 8.3.1　计算瑕积分 $\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　由洛必达法则我们有

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}} = 1,$$

因此被积函数有唯一的瑕点 $x=-1$. 所以有

$$\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0+0}\left(-\frac{1}{2}\arccos^2 x\Big|_{-1+\delta}^1\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

例 8.3.2 计算瑕积分 $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$.

解 容易看出 $x=0$ 是瑕点. 利用分部积分法得

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0+0} x\ln x\Big|_\delta^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = -1.$$

例 8.3.3 讨论瑕积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 的敛散性.

解法 1 当 $p=1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{b-x} &= \lim_{\delta\to 0+0}\int_a^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{b-x} = \lim_{\delta\to 0+0}[-\ln(b-x)]\Big|_a^{b-\delta} \\ &= \lim_{\delta\to 0+0}[\ln(b-a)-\ln\delta] = +\infty.\end{aligned}$$

当 $p\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} &= \lim_{\delta\to 0+0}\int_a^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} \\ &= -\lim_{\delta\to 0+0}\frac{1}{1-p}(b-x)^{1-p}\Big|_a^{b-\delta} \\ &= \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1, \\ +\infty, & p>1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛, 当 $p\geqslant 1$ 时发散.

解法 2 我们也可以用以下办法来讨论 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 的敛散性. 作变换 $t=\frac{1}{b-x}$,则当 $x=a$ 时, 有 $t=\frac{1}{b-a}$, 当 $x\to b-0$ 时, 有 $t\to +\infty$, 并且

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^2} = t^2\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = t^{-2}\mathrm{d}t.$$

将它们代入 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$, 得

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} t^{-2}t^p \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2-p}}.$$

由无穷积分的结果知, 当 $2-p>1$, 即 $p<1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 收敛; 当 $2-p\leqslant 1$, 即 $p\geqslant 1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 发散.

一般来说, 通过类似于上述解法 2 中的变换, 一个瑕积分总可以转化成一个无穷积分. 另外, 一个无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x (a>0)$ 通过变换 $x=\frac{1}{t}$ 可以化为 $\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$, 因此一个无穷积分就有可能化成一个定积分或者瑕积分.

8.3.2　瑕积分敛散性的判别法

对于瑕积分的敛散性的判定, 一个方法是将其化为无穷积分来讨论. 但有时由于化成无穷积分后被积函数会更加复杂, 因此我们需要讨论直接从瑕积分本身来判定的方法. 以下我们列出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中仅有瑕点 b 时瑕积分的有关判定定理, 其证明则留给读者. 因此, 在本小节中, 定义在 $[a,b)$ 上的函数 $f(x), g(x)$ 等, 总假定 b 是它们的瑕点, 并且它们在 $[a,b)$ 的任何子区间上可积. 另外, 我们要指出的是, 对于瑕积分, 同样有绝对收敛、条件收敛等概念和相应的结论.

定理 8.3.1 (柯西准则)　瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对于 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<\delta''<\delta'<\delta$ 时, 有

$$\left|\int_{b-\delta'}^{b-\delta''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

定理 8.3.2　设非负函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上满足: 存在正

常数 c_1, c_2, 使得当 $x \in [b-\delta_0, b)(0<\delta_0<b-a)$ 时, 有

$$c_1 f(x) \leqslant c_2 g(x),$$

则

(1) 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

推论 设非负函数 $f(x), g(x)(g(x)\neq 0)$ 满足

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l=0$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

同样, 对于瑕积分, 我们也有一些"标准函数"供其他函数来比较, 如 $\dfrac{1}{(b-x)^p}$.

例 8.3.4 讨论瑕积分 $\int_{-1}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^p}$ 的敛散性.

解 非负被积函数有两个瑕点 $x=\pm 1$. 由于

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\dfrac{1}{(1-x^2)^p}}{\dfrac{1}{(1-x)^p}} = \frac{1}{2^p}, \quad \lim_{x\to -1+0}\frac{\dfrac{1}{(1-x^2)^p}}{\dfrac{1}{(1+x)^p}} = \frac{1}{2^p},$$

因此可知, 当 $p<1$ 时, 瑕积分收敛; 当 $p\geqslant 1$ 时, 瑕积分发散.

对于瑕积分, 我们还有以下的判别法.

定理 8.3.3 (狄利克雷判别法) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上满足下述条件:

(1) $\exists M>0$, 使得对于 $\forall \delta>0$, 有

$$\left|\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M;$$

(2) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$,

则瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 8.3.4 (阿贝尔判别法) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上满足下述条件:

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界,

则瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 8.3.5 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x(\alpha\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解 这个广义积分不仅是一个无穷积分, 而且当 $\alpha>1$ 时, 还有一瑕点 $x=0$. 为了讨论该广义积分的敛散性, 我们必须分别讨论

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

的敛散性.

当 $x\to 0+0$ 时, 我们有

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

因此, 当 $\alpha<2$ 时, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $\alpha\geqslant 2$ 时, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $x \to +\infty$ 时, 如果 $\alpha \leqslant 1$, 则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty.$$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 发散, 因此有 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $\alpha > 1$ 时, 取 α', 使得 $1 < \alpha' < \alpha$, 则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^{\alpha'}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-\alpha'}}=0.$$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha'}}$ 收敛, 从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛.

因此, 当 $1 < \alpha < 2$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $\alpha \leqslant 1$ 或 $\alpha \geqslant 2$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

习 题 八

1. 计算下列无穷积分:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ (a \neq 0)$;

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

2. 讨论下列无穷积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^6 x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\mathrm{d}x\ (p>0, q>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x\ (\alpha \geqslant 0, \beta>0)$;

(6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\Big(1-\cos\frac{1}{x}\Big)^{\alpha}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$;

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\Big(\cos\frac{1}{x}+\sin^p\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x\ (p>1)$.

3. 讨论下列无穷积分的收敛性与绝对收敛性:

(1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}+\sin x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)\mathrm{d}x$.

4. (1) 讨论无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性;

(2) 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的非负函数, 且在任何有限闭区间上可积. 证明: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是 V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

6. 指出下述计算中的错误:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int_{-1}^{1} t^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t = -2,$$

其中 $t=\dfrac{1}{x}$.

7. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调下降的连续正函数, 并且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散. 记 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x\in[0,+\infty))$. 试问 $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 是否必定发散. (说明理由)

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 其导函数 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调上升, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$; 再设 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 并且存在 $M>0$, 使得对于 $\forall X>0$, 有 $\left|\int_0^X g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$. 证明 $\int_0^{+\infty} g(f(x))\mathrm{d}x$ 收敛.

9. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的连续函数, 且 $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明: 对于 $\forall\alpha>0$, 无穷积分 $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 并且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何有限闭区间上可积, 并且 $f(x)$ 的**拉普拉斯**(Laplace)**变换**

$$L(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\mathrm{d}t$$

在 $s=s_0 \geqslant 0$ 时收敛. 证明 $L(s)$ 在 $s>s_0$ 时也收敛.

13. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何有限闭区间上可积, 并且 $f(x) \leqslant g(x), \forall x\in[0,+\infty)$; 再设无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛. 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} |g(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

14. 计算下列瑕积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^1 x^n \ln^n x\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$.

15. 讨论下列瑕积分的敛散性：

(1) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{\alpha} x\cos^{\beta} x}\ (\alpha>0,\beta>0)$;

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]^p\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(4) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (\ln x^2)^p\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(5) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^1 x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q\mathrm{d}x\ (p>0,q>0)$;

(7) $\int_0^1 \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

16. 讨论下列广义积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^{\beta}}\mathrm{d}x\ (\beta>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x|\ln x|^{\alpha}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)^{\alpha}}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{\beta}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{+\infty} x\sin\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$;

17. 讨论下列广义积分的收敛性与绝对收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\ln x|^p \frac{\sin x}{x^q}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^p)\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta}\mathrm{d}x$.

18. 证明下面的等式成立 (其中 n 是正整数):

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = n!$;　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1+n}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.

19. 设函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续, $g(x)(x-a)^2$ 在 $(a,b]$ 上单调, 并且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)(x-a)^2 = 0$. 证明瑕积分 $\displaystyle\int_a^b g(x)\sin\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x$ 收敛.

20. 设 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上有定义, 且对于 $\forall\delta > 0, f(x) \in R[\delta,1]$, 再设瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 x^s f(x)\mathrm{d}x$ 在 $s = s_0$ 时收敛. 证明 $\displaystyle\int_0^1 x^s f(x)\mathrm{d}x$ 对一切 $s \geqslant s_0$ 都收敛.

21. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调, 并且积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

如果去掉 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调这个条件, 问: 以上结论是否还一定正确?

22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调, 并且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

23. (1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 并且 $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 证明: 对于 $0 < a < b$, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = [f(0)-\alpha]\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 并且无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 对于 $0<a<b$, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$(常数), 瑕积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 对于 $0<a<b$, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\alpha\ln\frac{a}{b}.$$

(4) 用以上结果计算下列广义积分:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x.$$

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调, $g(x)\neq 0$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数. 证明: 无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)|g(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

25. 设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$的任何有限子区间上可积, 且无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 试问: 是否 $\int_a^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 必收敛?

26. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何有限子区间上可积, 且极限 $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)$ 存在. 证明: 对任意的 $0<a<b, c>0$, 瑕积分

$$\int_0^{c}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x$$

收敛.

第九章　数 项 级 数

无穷级数的理论具有悠久的历史, 许多有趣的数学问题与它有关系, 在日常生活中我们也常常会遇到与它有关的问题. 如在古代人们为了计算圆的面积, 用圆内接正多边形的面积来逼近圆的面积, 该过程实际上就是通过一个无穷级数的部分和序列来求得圆面积具有任何精度的近似值. 另外, 无穷级数中有许多研究技巧与方法, 在许多学科中也有着广泛的用途. 当然, 若仅仅限于以上这些因素, 无穷级数未必能成为数学分析课程中专门讨论的一个对象. 我们在数学分析中研究无穷级数, 最主要的原因还是它对函数的研究起着重要的作用. 在本书的后续章节中可以看出这一点.

§9.1　数项级数的基本概念

人们为了拓广函数类, 很原始的想法是将无穷多个函数相加起来. 我们注意到无穷多个函数相加时, 对定义域中固定的每一点来说, 也就是无穷多个数相加, 因此必须先研究形如

$$a_1+\cdots+a_n+\cdots \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{9.1.1}$$

的和式. 另外, 在许多实际问题中, 我们也会遇到类似的和式, 如大家在中学学过的等比数列的和等. 在学习序列极限时, 我们也曾遇到过形如

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

$$y_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots$$

的序列. 读者不难发现, 对 $n \geqslant 1$, x_n 其实就是和式 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ 的前 n 项之和; 而对 $n \geqslant 1, y_n$ 则是 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ 的前 n 项之和. 通过前面的学习我们已经知道 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 是存在的. 因此我们很自然地就说 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

9.1.1　数项级数的基本概念

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$ 为一个序列, 我们称

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为一个**数项级数**(简称**级数**), 记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 其中 $a_n(n = 1, 2, \cdots)$ 称为级数的**通项**, 并称 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(n = 1, 2, \cdots)$ 为级数的前 n 项**部分和**, 而称 $\{S_n\}$ 为**部分和序列**.

定义 9.1.1　设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是一个数项级数. 如果它的部分和序列 $\{S_n\}$ 的是收敛的, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在, 则称**级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **收敛**, 并且记 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. 这时也称极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的和. 如果 $\{S_n\}$ 是发散序列, 则称**级数** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **发散**. 特别地, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty(\pm\infty)$, 我们也称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散到 $\infty(\pm\infty)$.

从以上定义知, 级数的敛散性本质上可以归结到序列的敛散性. 但我们以后会发现, 对级数的研究有许多特别的工具与方法, 似乎这些工具与方法不太容易直接从序列的研究中得到.

例 9.1.1 对 $q \in \mathbb{R}$, 形如

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots \tag{9.1.2}$$

的级数称为**等比级数**(或**几何级数**). 试讨论该级数的敛散性.

解 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 该级数的前 n 项部分和为

$$S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

当 $|q| < 1$ 时, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(q) = \dfrac{1}{1-q}$. 因此此时级数 (9.1.2) 收敛, 并且有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

当 $q = -1$ 时, $S_n(-1) = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(q)$ 不存在. 因此此时级数 (9.1.2) 发散, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

当 $q = 1$ 时, 有 $S_n(1) = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(1) = +\infty$, 从而此时级数 (9.1.2) 发散.

当 $|q| > 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(q) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n-1}{q-1} = \infty$, 因此此时级数 (9.1.2) 发散.

所以当 $|q| < 1$ 时, 等比级数 (9.1.2) 收敛; 当 $|q| \geqslant 1$ 时, 级数 (9.1.2) 发散. 特别地, 当 $q < -1$ 时, 级数 (9.1.2) 发散到 ∞; 当 $q > 1$ 时, 级数 (9.1.2) 发散到 $+\infty$.

例 9.1.2 对固定的 $n_0 \in \mathbb{N}$, 证明数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+n_0)}$ 收敛, 并求其值.

解 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 该级数的前 n 项部分和 S_n 可以表示成

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+n_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n_0}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n_0}\right)$$

$$= \frac{1}{n_0}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k} + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n_0+1}^{n+n_0}\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k} + \frac{1}{n_0}\sum_{k=n+1}^{n+n_0}\frac{1}{k}.$$

由于

$$0 < \frac{1}{n_0}\sum_{k=n+1}^{n+n_0}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n_0}\cdot\frac{n_0}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+n_0)}$ 收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+n_0)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}.$$

例 9.1.3 证明 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, 并证明 e 是无理数.

证明 记 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(n=1,2,\cdots)$. 对任意固定的 $n>1$, 任取 $k>n$, 有

$$\mathrm{e} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{k}\right).$$

在上式中令 $k\to\infty$, 得

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!} \leqslant \mathrm{e}.$$

再由

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!} \leqslant \mathrm{e},$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e}$. 由级数收敛的定义知 $\mathrm{e} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}$.

对任意正整数 n, m, 有

$$\begin{aligned}
0 &< S_{n+m} - S_n \\
&= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)!} \\
&\leqslant \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-1}}\right] \\
&< \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

在上式中固定 n, 让 $m \to +\infty$, 得

$$0 < \mathrm{e} - S_n \leqslant \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n}. \tag{9.1.3}$$

从上式我们容易推出 e 是无理数. 事实上, 若 e 是有理数, 则存在既约正整数 p, q, 使得 $\mathrm{e} = \dfrac{q}{p}$. 取定 $n \geqslant \max\{2, p\} + 1$, 在 (9.1.3) 后一不等式的两边乘上 $(n-1)!$, 则其左边是一个正整数, 而右边是一个真分数. 此矛盾便证明了 e 是一个无理数.

在第一册里, 我们曾利用指数函数 e^x 的带拉格朗日余项的泰勒公式证明过 e 是无理数. 在这里, 我们仅仅利用数项级数收敛的定义就证明了该结论.

关于数项级数我们有以下简单的性质, 其证明作为练习留给读者.

性质 9.1.1 改变数项级数有限项的值后得到的新级数与原级数敛散性相同.

性质 9.1.2 对于任意常数 $k \neq 0$, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} k a_n$ 的敛散性相同.

性质 9.1.3 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都收敛, 则数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛, 并且成立下述等式:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{+\infty}b_n.$$

在性质 9.1.3 中, 特别地, 当 $\beta=0$ 时, 对于收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, 有

$$\sum_{n=}^{+\infty}\alpha a_n=\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}a_n \quad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

9.1.2 柯西准则

对于很多数项级数, 并不能简单地计算出它的部分和, 因此很难从定义来判别其敛散性, 从而我们必须直接从数项级数的本身来研究它是否收敛. 在下面的两节中我们将详细地研究这个问题. 在这里, 我们根据数项级数敛散性的定义, 给出以下判别级数收敛的柯西准则.

定理 9.1.4 (柯西准则) 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是一个数项级数, 则它收敛的充分必要条件是: 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>m>N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right|=|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n|<\varepsilon.$$

此定理的证明可以从数项级数收敛的定义直接推出, 故省略.

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 由柯西准则, 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 特别地取 $n,n-1\geqslant N$ 时, 我们有 $|a_n|<\varepsilon$, 从而我们有下面的重要结论.

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是一个数项级数, 若它收敛, 则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

显然, 推论的逆命题是不成立的, 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$(称为**调和级数**)是发散的, 但是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

例 9.1.4 证明数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

证明 由于

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1,$$

因此由定理 9.1.4 的推论即知, 该数项级数是发散的.

例 9.1.5 证明: 当 $\alpha \neq k\pi (k\in\mathbb{Z})$ 时, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin n\alpha$ 发散.

证明 倘若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin n\alpha$ 收敛, 由推论 9.1.5 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\alpha = 0$. 由于对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\sin(n+1)\alpha = \cos\alpha\sin n\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha,$$

因此我们推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$. 显然这与恒等式 $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$ 矛盾. 因此数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin n\alpha$ 发散.

§9.2 正项级数

9.2.1 比较判别法

对于数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 而言, 与无穷积分一样, 也有绝对收敛和条件收敛的概念.

定义 9.2.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一个数项级数. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **绝对收敛**. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **条件收敛**.

由柯西准则及三角不等式易于推出: 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 必定收敛.

由定义 9.2.1 可看出, 一个级数是否为绝对收敛的问题可以转化为所谓的正项级数的敛散性问题.

定义 9.2.2 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是一个数项级数. 若对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n \geqslant 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一个**正项级数**.

对于正项级数, 以下结论是显然的.

定理 9.2.1 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一个正项级数, 则它收敛的充分必要条件是它的部分和序列是有界的. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则它必发散到 $+\infty$.

判别正项级数敛散性最基本的方法是如下的比较判别法.

定理 9.2.2(比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为两个正项级数, c_1, c_2 是两个正数. 若存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$c_1 a_n \leqslant c_2 b_n, \tag{9.2.1}$$

则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也发散.

证明 因为一个级数改变有限多项的值后得到的级数与原级数具有相同的敛散性, 因此不妨设 (9.2.1) 式对一切 $n \geqslant 1$ 都成立.

对于 $n \in \mathbb{N}$, 分别记 S_n 和 S'_n 为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的前 n 项部分

和, 则由 (9.2.1) 式有

$$c_1S_n \leqslant c_2S_n' \quad (n=1,2,\cdots).$$

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛时, 由定理 9.2.1 知, $\exists M>0$, 使得对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$S_n' \leqslant M.$$

因此, 对一切 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$S_n \leqslant \frac{c_2}{c_1}M.$$

由定理 9.2.1 知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛.

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散时, 有 $S_n\to+\infty$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}S_n' \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{c_1}{c_2}S_n=+\infty.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 也发散.

由极限的保号性及定理 9.2.2, 我们有以下的推论.

推论 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n(b_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N})$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,$$

则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 具有相同的敛散性;

(2) 当 $l=0$ 时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛;

(3) 当 $l=+\infty$ 时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也发散.

例 9.2.1　证明: 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p \leqslant 1$ 时发散, 当 $p>1$ 时收敛.

证明　当 $p=1$ 时, 我们已经知道 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的. 当 $p<1$ 时, 对于 $\forall n>1$, 有 $\frac{1}{n}<\frac{1}{n^p}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

为了证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 我们首先注意到以下简单事实: 因为一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的部分和序列 $\{S_n\}$ 是单调上升的, 因此若它有一个子列是有界的, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 必收敛.

注意到 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 是一个单调下降序列, 对于 $\forall k \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}
S_{2^{k+1}-1} &= 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots \\
&\quad +\left[\frac{1}{(2^k)^p}+\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^p}\right] \\
&\leqslant 1+2\cdot\frac{1}{2^p}+2^2\cdot\frac{1}{2^{2p}}+\cdots+2^k\cdot\frac{1}{2^{kp}} \\
&= \sum_{j=0}^{k} 2^{(1-p)j} < \frac{1}{1-2^{1-p}}.
\end{aligned}$$

上式说明, 当 $p>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 的部分和序列 $\{S_n\}$ 的子列 $\{S_{2^{k+1}-1}\}$ 有界, 因此该级数是收敛的.

在正项级数敛散性的讨论中, 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 是两个常

用的参考级数. 不仅许多其他的级数常用它们来作比较, 而且很多判别法也是建立在这两个级数的基础上的.

例 9.2.2 设 $F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n = 3, 4, \cdots)$, 证明正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$ 收敛.

证明 对于 $n = 1, 2, \cdots$, 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}$. 对任意 $n \geqslant 3$, 我们有

$$F_{n-2} < F_{n-1} < 2F_{n-2},$$

因此有

$$F_n > F_{n-1} + \frac{1}{2}F_{n-1} = \frac{3}{2}F_{n-1}.$$

利用上式容易看出

$$\lim_{n\to\infty} F_n = +\infty.$$

同时我们还可以推出

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{F_k} \leqslant \frac{2}{3}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{F_{k-1}},$$

即

$$S_n - 1 - \frac{1}{2} < \frac{2}{3}S_n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}F_n^{-1}.$$

将上式化简得

$$S_n < \frac{5}{2} - 2F_n^{-1} < 3.$$

因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$ 收敛.

例 9.2.3 试讨论数项级数 $\sum_{n=3}^{+\infty} \ln\cos\frac{\pi}{n}$ 的敛散性.

解 记 $a_n = \ln\cos\frac{\pi}{n}$, 则 $a_n < 0$. 由

$$\begin{aligned}\ln\cos\frac{\pi}{n} &= \ln\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} - 1\right) \\ &\sim \cos\frac{\pi}{n} - 1 \sim -\frac{\pi^2}{2n^2} \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

及 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛, 可知正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛, 因此原级数收敛.

例 9.2.4　试讨论正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^k\right]^p(k>0,p>0)$ 的敛散性.

解　记 $a_n=\left[1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^k\right]^p(n=1,2,\cdots)$. 由

$$\begin{aligned}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^k&=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-k}\\&=\left[1-\frac{k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=1-\frac{2k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

得

$$a_n=\left[\frac{2k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p\sim\frac{(2k)^p}{n^p}\quad(n\to\infty).$$

由比较判别法知, 当 $p>1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛; 当 $p\leqslant1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

例 9.2.5　讨论正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-2}}{\mathrm{e}^n n!}$ 的敛散性.

解　记 $a_n=\frac{n^{n-2}}{\mathrm{e}^n n!}(n=1,2,\cdots)$. 对任意 $n\geqslant2$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{\mathrm{e}}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\&=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{b_{n+1}}{b_n},\end{aligned}$$

其中 $b_n = \dfrac{1}{n^2}(n = 2, 3, \cdots)$. 由上面的不等式我们推出

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_2} &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \\ &< \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_{n-2}}{b_{n-3}} \cdots \frac{b_3}{b_2} \\ &= \frac{b_n}{b_2} = \frac{4}{n^2}.\end{aligned}$$

因此当 $n \geqslant 2$ 时, 有

$$a_n < \frac{2}{\mathrm{e}^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

由定理 9.2.2 知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-2}}{\mathrm{e}^n n!}$ 收敛.

9.2.2 达朗贝尔判别法与柯西判别法

以下两个判别法给出了从正项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 本身的性质来判断其敛散性的方法, 但这些判别法的本质还是基于将正项级数与几何级数进行比较而得到的.

定理 9.2.3 (达朗贝尔(D'Alembert)判别法) 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ (a_n \neq 0, n = 1, 2, \cdots)$ 为正项级数, 则

(1) 当 $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{r} < 1$ 时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $\displaystyle\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{r} > 1$ 时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明 我们先证 (1). 取 r_1, 使得其满足 $\overline{r} < r_1 < 1$, 则存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < r_1$. 因此有

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} a_{N_1} \\ &< r_1^{(n-N_1)} a_{N_1} = C_1 r_1^n,\end{aligned}$$

其中 $C_1 = a_{N_1} r_1^{-N_1}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_1^n$ 是收敛的, 因此由定理 9.2.2 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛.

现证 (2). 取 r_2, 使得其满足 $\underline{r} > r_2 > 1$, 则存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > r_2$. 因此有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N_2+1}}{a_{N_2}} a_{N_2} \\ &> r_2^{(n-N_2)} a_{N_2} = C_2 r_2^n, \end{aligned}$$

其中 $C_2 = a_{N_2} r_2^{-N_2}$. 由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. 证毕.

对于 $\forall p > 0$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1,$$

因此用达朗贝尔判别法我们无法判别正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性. 换句话说, 当定理 9.2.3 中的 $\underline{r}$ 和 $\overline{r}$ 等于 1 时, 达朗贝尔判别法是失效的.

例 9.2.6　试讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n n!}{n^n}$ 的敛散性, 其中 $x \geqslant 0$.

解　对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 记 $a_n = \dfrac{x^n n!}{n^n}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\dfrac{x^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{x^n n!}{n^n}} = \frac{x(n+1)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n+1)} \\ &= \frac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \frac{x}{\mathrm{e}} \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

因此由达朗贝尔判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$ 当 $0 \leqslant x < \mathrm{e}$ 时收敛, 当 $x > \mathrm{e}$ 时发散.

当 $x = \mathrm{e}$ 时, 由于

$$(n+1)^n < \mathrm{e}^n n! \quad (n > 1),$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 因此该级数发散.

定理 9.2.4 (柯西判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一个正项级数, 记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = r,$$

则

(1) 当 $r < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $r > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 当 $r < 1$ 时, 取 r_1 满足 $r < r_1 < 1$, 则 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $\sqrt[n]{a_n} < r_1$, 即 $a_n < r_1^n$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_1^n$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $r > 1$ 时, 取 r_2 满足 $r > r_2 > 1$, 则对于 $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n' > N$, 使得 $\sqrt[n']{a_{n'}} > r_2$, 即 $a_{n'} > r_2^{n'}$. 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. 证毕.

对于 $\forall p > 0$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1$, 因此用柯西判别法我们也无法判别正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性. 换句话说, 当定理 9.2.4 中的 r 为 1 时, 柯西判别法也是失效的.

从理论上来说，凡是能用达朗贝尔判别法来判别敛散性的正项级数均可由柯西判别法来加以判别. 事实上，对一般正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(a_n>0(n=1,2,\cdots))$，下面的不等式总是成立的：

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

上述不等式的证明留给读者.

例 9.2.7　试讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解　记 $a_n=\left(\sqrt[n]{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $(n=1,2,\cdots)$. 由

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n}-\sin\frac{1}{n}&=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-\sin\frac{1}{n}\\&=1+\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)-\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=1+\frac{\ln n-1}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

得

$$\sqrt[n]{a_n}=\left[1+\frac{\ln n-1}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^n\to+\infty\quad(n\to\infty).$$

由柯西判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

例 9.2.8　试讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}C_n$ 的敛散性，其中

$$C_n=\begin{cases}a^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{为奇数},\\ b^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}\end{cases}\quad(0<a<b<1).$$

解　由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b^{\frac{n}{2}}}=b^{\frac{1}{2}}<1,$$

由柯西判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ 是收敛的.

注 注意到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^{\frac{n+1}{2}}}{a^{\frac{n+1}{2}}}=+\infty,$$

而

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{n+2}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}=0,$$

因此达朗贝尔判别法无法判别 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$ 的敛散性. 值得注意的是, 在某些情况下, 用达朗贝尔判别法则较为简便, 如前面的例 9.2.5.

9.2.3 拉贝判别法

以下我们考虑以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$ 作为比较标准时的判别法. 考查比值 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, 读者不难找到规律并得到以下的判别法.

定理 9.2.5 (拉贝(Raabe)判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一正项级数.

(1) 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=r>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=r'<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 取 $r_1(r>r_1>1)$, 则存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N_1$ 时, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{r_1}{n}.$$

再取 $r_2(r_1>r_2>1)$, 由于 $f(x)=1+r_1x-(1+x)^{r_2}$ 满足 $f(0)=0$, 且 $f'(x)=r_1-r_2(1+x)^{r_2-1}$ 在 $x=0$ 的某个邻域内恒大于 0, 因此存在 $N_2\geqslant N_1$, 当 $n\geqslant N_2$ 时, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r_1}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_2} = \frac{(n+1)^{r_2}}{n^{r_2}}.$$

上式等价于

$$(n+1)^{r_2} a_{n+1} < n^{r_2} a_n.$$

因此当 $n > N_2$ 时, 我们有

$$a_n < \frac{N_2^{r_2} a_{N_2}}{n^{r_2}} = \frac{C}{n^{r_2}} \quad (C = N_2^{r_2} a_{N_2}).$$

由比较判别法, 我们推知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是收敛的.

(2) $r' < 1$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

因此当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$na_n < (n+1)a_{n+1},$$

进一步我们有 $na_n > Na_N$, 即

$$a_n > \frac{Na_N}{n} = \frac{C}{n} \quad (C = Na_N).$$

由比较判别法, 我们推知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是发散的. 证毕.

例 9.2.9　讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.

解　记 $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 则有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} - 1\right] = n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

由拉贝判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散.

注 若对例 9.2.9 中的级数用达朗贝尔与柯西判别法, 则无法确定该级数的敛散性.

从定理 9.2.5 的证明中可以看出, 若 (2) 中的条件用以下条件替换其结论也成立: 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1$.

细心的读者不难发现, 以上的一些正项级数判别法实际上可以通过几何级数或级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 中的前后两项的比较找出规律而得到. 按照这种思想, 读者可以从研究其他的“标准级数”来发现一些规律从而找到一些新的判别法.

9.2.4 柯西积分判别法

在许多正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 中, 序列 $\{a_n\}$ 是单调下降趋于零的. $\{a_n\}$ 作为定义在正整数集 $\mathbb{N}$ 上的一个函数, 它的图像是 Oxy 平面内的一个点集. 任取一个 $[1,+\infty)$ 上的单调下降连续函数 $f(x)$, 使得 $f(n)=a_n(n=1,2,\cdots)$ (见图 9.2.1).

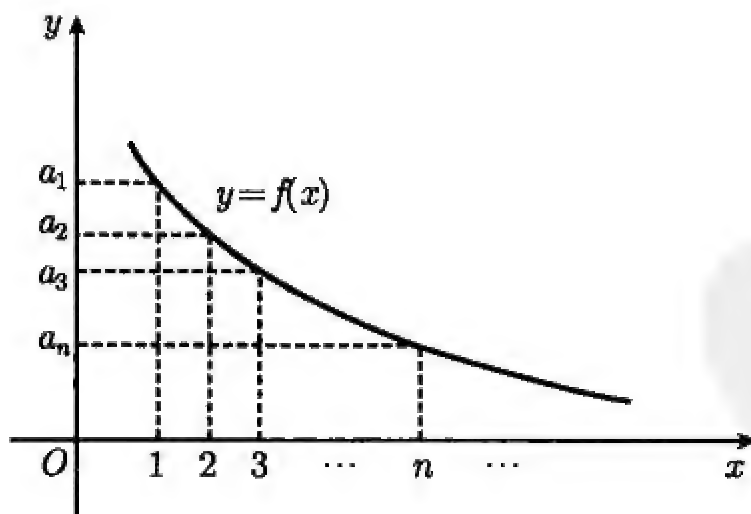


图 9.2.1

我们可以建立如下级数敛散性与无穷积分敛散性的关系.

定理 9.2.6　设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调下降趋于零, 记 $a_n = f(n)(n=1,2,\cdots)$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明　对任何正整数 n, 当 $n \leqslant x \leqslant n+1$ 时, 有

$$f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n),$$

因此有

$$a_{n+1} = \int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}x = a_n.$$

对上面不等式关于 n 求和得

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

因此当 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ 有上界 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 反之, 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛时, 无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有上界 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 从而 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. 证毕.

在广义积分中, 我们讨论过以下积分的敛散性:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}.$$

由定理 9.2.6 知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p \leqslant 1$ 时发散. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$, 当 $p>1$ 时, 对任何的 q, 该级数都收敛; 当 $p=1$ 时, 对 $q>1$ 该级数收敛, 而对其他的情形该级数则是发散的.

值得注意的是, 对于正项级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}a_n=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n},$$

用柯西判别法及拉贝判别法都无法判别它的敛散性.

例 9.2.10 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 记 $r_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}a_k\ (n=1,2,\cdots)$, 证明: 当 $p<1$ 时, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛.

证明 设 $a_0=0$, 并记 $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. 由 $r_n=S-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k=S$ 知, $\{r_n\}$ 单调下降趋于零, 因此我们有

$$S=r_1\geqslant r_2\geqslant r_3\geqslant r_4\geqslant\cdots,$$

且 $r_n>0\ (n=1,2,\cdots)$.

注意到对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\frac{a_n}{r_n^p}\leqslant\int_{r_{n+1}}^{r_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

从而当 $p<1$ 时, 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{r_k^p}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{r_{k+1}}^{r_k}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}<\int_0^S\frac{\mathrm{d}x}{x^p}<+\infty.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛.

上例告诉我们, 当正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(a_n>0)$ 收敛时, 我们总能找到另一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty$.

§9.3　任意项级数

9.3.1　交错级数的敛散性

对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 而言, 若要讨论它是否绝对收敛时, 我们可以转化为讨论正项级数的敛散性问题. 因此对于任意项级数, 我们现在要讨论的问题是如何判定它们的条件收敛性.

数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的一个必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 由于该条件不是充分的, 因此我们还需附加一定的条件才能保证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的收敛性. 我们有以下的定理.

定理 9.3.1　设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 满足条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(2) 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 中加上一些括号, 并且在每个括号中的加数个数 $\leqslant N$, 得到的级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}b_k$ 是收敛的,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

证明　记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\cdots)$. 由于加括号后的级数收敛, 因此存在 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{n_k}\}$ 是收敛的. 对任意的正整数 $n>n_1$, 必存在 n_k, 使得 $n_k\leqslant n<n_{k+1}$, 因此有

$$|S_n-S_{n_k}|\leqslant\sum_{j=1}^{N}|a_{n_k+j}|.$$

注意到 $n\to\infty$ 时必有 $n_k\to\infty$, 由 $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=j}^{j+N}|a_k|=0$, 我们推出 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛. 证毕.

下面我们来研究一类特殊的任意项级数 —— 交错级数. 设 $\{a_n\}$ 是一个序列, 且对 $\forall n\in\mathbb{N}, a_n\geqslant 0$, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 为一个**交错级数**. 由定理 9.3.1, 可推出下面重要的结论.

推论 (莱布尼茨交错级数判别法) 设 $\{a_n\}$是一个单调序列, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

证明 不妨设序列 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零, 从而必有 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$. 显然 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_{2k-1}-a_{2k})$ 是在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$中加上括号后得到的正项级数. 记该正项级数的前 n 项部分和为 S_n, 我们有

$$\begin{aligned}0\leqslant S_n&=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})\\&\leqslant a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\\&\leqslant a_1,\end{aligned}$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_{2k-1}-a_{2k})$ 收敛. 由定理 9.3.1 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 也收敛.

注 对上述定理的证明略加分析, 我们可以得到以下结论: 设 $\{a_n\}$ 是单调下降趋于零的序列, 则对任意的正整数 N, 以下不等式成立:

$$0\leqslant\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\right|\leqslant a_N.$$

另外, 我们今后将收敛的交错级数称为**莱布尼茨交错级数**.

例 9.3.1　试讨论交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}(p,q\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解　从上节知, 当 $p>1$ 时, 对于 $\forall q\in\mathbb{R}$, 该级数绝对收敛; 当 $p=1, q>1$ 时, 该级数也绝对收敛.

当 $0<p<1$ 时, 对于 $\forall q\in\mathbb{R}$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}=0$. 注意到当 x 充分大时, 有

$$\begin{aligned}(x^{-p}\ln^{-q}x)'&=-px^{-p-1}\ln^{-q}x-x^{-p}(-q)(\ln^{-q-1}x)\ \frac{1}{x}\\&=x^{-p-1}\ln^{-q}x\Big(-p+\frac{q}{\ln x}\Big)<0,\end{aligned}$$

我们推出, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $\left\{\dfrac{1}{n^p\ln^q n}\right\}$ 单调下降. 因此当 $0<p<1$ 时, 对于 $\forall q\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$ 收敛.显然此时级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}$ 发散, 从而原级数条件收敛.

当 $p=0$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln^q n}$, 显然该级数当 $q>0$ 时条件收敛, 当 $q\leqslant 0$ 发散.

当 $p<0$ 时, 由于对于 $\forall q\in\mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}=\infty$, 因此 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$ 发散.

9.3.2　狄利克雷判别法和阿贝尔判别法

如同广义积分一样, 当数项级数具有形式 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 时, 在一些条件下我们也有相应的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

定理 9.3.2 (狄利克雷判别法)　设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的部分和序列 $\left\{S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$ 是有界的, $\{b_n\}$ 是单调序列且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则数项

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 由 $\{S_n\}$ 有界, 存在 $M>0$, 使得

$$|S_n| \leqslant \frac{M}{2} \quad (n=1,2,\cdots),$$

从而对任意的正整数 n,p, 有

$$|S_{n+p}-S_n| \leqslant M.$$

对于 $\forall \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

因此当 $n>N$ 时, 对任意正整数 p, 利用阿贝尔变换 (引理 7.5.4) 得

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &= \left|b_{n+p}(S_{n+p}-S_n) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(S_k-S_n)(b_{k+1}-b_k)\right| \\
&\leqslant M\left\{|b_{n+p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_{k+1}-b_k|\right\} \\
&= M\left\{|b_{n+p}| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_{k+1}-b_k)\right|\right\} \\
&\leqslant M\{|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|\} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

由柯西准则知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. 证毕.

定理 9.3.3 (阿贝尔判别法) 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 序列 $\{b_n\}$ 单调有界, 则数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 由于 $\{b_n\}$ 是单调有界序列, 从而收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b)a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b a_n.$$

显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ba_n$ 是收敛的, 而在级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n - b)a_n$ 中令 $b'_n = b_n - b\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{b'_n\}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 满足狄利克雷判别法 (定理 9.3.2) 的条件, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n - b)a_n$ 收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. 证毕.

注　容易看出莱布尼茨交错级数判别法可以由狄利克雷判别法直接推出.

例 9.3.2　试讨论交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}\ (\alpha > 0)$ 的敛散性.

解　显然, 当 $\alpha > 1$ 时, 该级数绝对收敛. 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, 对 $n \in \mathbb{N}$, 记 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ 和 $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$. 由莱布尼茨交错级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 又记 $n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}$, 则容易证明: 当 n 充分大时, 序列 $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ 是单调下降的. 因此序列 $\left\{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right\}$ 当 n 充分大时单调上升, 且有上界 1. 于是由阿贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$ 收敛. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$, 而当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ 发散, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{h}}}$ 发散, 故此时原级数是条件收敛的.

例 9.3.3　设序列 $\{a_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 证明:

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 都绝对收敛;

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 对一切 $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 条件收

敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 对一切 $x \neq 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$ 条件收敛.

证明 (1) 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们不妨设 $a_n > 0$, 此时显然有

$$|a_n \sin nx| \leqslant a_n, \quad |a_n \cos nx| \leqslant a_n.$$

因此当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 都绝对收敛.

(2) 我们先证两个级数在给定的条件下是收敛的. 由狄利克雷判别法, 只要证在所给条件下, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx, \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$$

有界即可. 事实上, 由

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2} \cdot S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right] \\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \end{aligned}$$

当 $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时 (当 $x = k\pi$ 时, 该级数的每一项均为 0), 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}.$$

而对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 由

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2} \cdot S'_n &= -\sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right] \\ &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}, \end{aligned}$$

当 $x \neq 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$|S'_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}.$$

因此由狄利克雷判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 都收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$ 对 $x\neq 2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散时，注意到当 $x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}0$，下面假定 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$，我们证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 条件收敛. 事实上，由于对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$|a_n\sin nx|\geqslant|a_n\sin^2 nx|=\frac{a_n}{2}(1-\cos 2nx),$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos 2nx$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=+\infty$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n\sin nx|=+\infty$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 条件收敛.

同理，当 $x\neq 2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$ 条件收敛.

§9.4 数项级数的性质

由于数项级数是由一列数相加而成，人们自然要问：对级数而言加法结合律、交换律是否还成立？当讨论两个数项级数相乘的问题时，我们还会遇到分配律的问题. 在本节中我们将仔细研究这些问题.

9.4.1 结合律

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是一个数项级数，对该级数加上一些括号并将每个括号中的加数求和后作为一项将得到一个新的级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}b_k$. 关于数项级数

的结合律, 我们有以下的结论.

定理 9.4.1 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是收敛级数, 则在 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 中任意加括号后得到的级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 也收敛, 并且 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

证明 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 设 S_n 是 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$前 n 项部分和; 对于 $\forall k \in \mathbb{N}$, 设 S'_k 是 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 的前 k 项的部份和. 容易看出, $\{S'_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子列, 因此当 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在时, $\lim_{k\to\infty} S'_k$ 也存在, 并且 $\lim_{k\to\infty} S'_k = \lim_{n\to\infty} S_n$. 证毕.

数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ 发散告诉我们, 级数加上括号后得到的级数收敛并不能推出原来的级数收敛.

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 我们容易看出, 如果在 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 中加上括号后得到的级数是收敛的, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛. 对于一般的级数来说, 如果在 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 中加上括号, 并且在每个括号中的项都具有相同的符号, 将这样得到的级数记为 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是 $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ 收敛, 并且当它们收敛时它们的和也相同 (见本章习题).

9.4.2 交换律

交换律对无穷多个数相加是否还成立呢? 为此我们要讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与它的各项重排后所得的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ 的关系. 为了精确描述

级数的重排, 我们首先来定义正整数集 $\mathbb{N}$ 的重排：若函数 $f(n)$ 是 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个一一对应, 则称 $f(n)(n\in\mathbb{N})$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个重排.

现设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是一个数项级数. 我们称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a'_n$ 是它的一个**重排**, 如果存在 $\mathbb{N}$ 的一个重排 $f(n)$, 使得 $a'_n=a_{f(n)}(n=1,2,\cdots)$.

对于一般的数项级数来说, 我们有以下的结果.

定理 9.4.2 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为一个数项级数, $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为一个重排, 再设 $\exists M>0$, 使得对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $|f(n)-n|\leqslant M$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 收敛, 并且当它们收敛时, 有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$.

证明 *必要性* 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛,下证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 也收敛. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 又因对于 $\forall n\in N$, 有 $|f(n)-n|\leqslant M$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-M}^{M}|a_{n+j}|=0.$$

设 $\{S_n\}$ 和 $\{S'_n\}$ 分别为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 的部分和序列, 容易看出

$$|S_n-S'_n|\leqslant\sum_{j=-M}^{M}|a_{n+j}|\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S'_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$.

充分性 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 收敛, 显然 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 的一个重排,

其重排函数为 $f^{-1}(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. 容易看出, 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$|f^{-1}(f(n))-f(n)|=|n-f(n)|\leqslant M.$$

由必要性的证明知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$. 证毕.

注 定理 9.4.2 告诉我们: 若一个级数交换各项的位置, 只要每项离原来所在的位置不要太远, 则不会改变级数的敛散性.

对于绝对收敛的级数, 我们有下面满意的结果:

定理 9.4.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是绝对收敛的, 则它的任意一个重排 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 也绝对收敛, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$.

证明 先证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|$ 收敛并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$. 记 $\{S_n'\}$ 为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|$ 的部分和序列, 显然, 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$S_n'\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.$$

这说明了 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|$ 是收敛的, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 是绝对收敛的. 再令 $n\to\infty$, 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 的一个重排, 我们同样有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|.$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}|a_{f(n)}|.$$

为了证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 我们定义

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leqslant 0, \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0, \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{9.4.1}$$

显然对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $a_n^+ \leqslant |a_n|$, $a_n^- \leqslant |a_n|$. 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-$ 均为收敛的正项级数, 且有 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}^+$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}^-$. 由此得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty}a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}^+ = \sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}.$$

证毕.

对于条件收敛的级数, 则上述定理可能不成立. 我们来考查以下例子. 我们知道数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

是条件收敛的级数. 利用 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + c + \varepsilon_n$, 其中 c 为欧拉常数, $\varepsilon_n \to 0(n \to \infty)$, 我们得到级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 前 $2n$ 项的部分和

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

$$= \ln 2n + \varepsilon_{2n} + c - (\ln n + c + \varepsilon_n)$$
$$= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \to \ln 2 \quad (n \to \infty),$$

再由级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 前 $2n+1$ 项的部分和

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2 \quad (n \to \infty),$$

知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛到 $\ln 2$.

我们将此级数重排, 使得每两个正项后面跟一个负项, 即

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots.$$

对于 $n \in \mathbb{N}$, 设它的前 n 项部分和 S'_n, 则

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} \right). \tag{9.4.2}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

将它与 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + c + \varepsilon_n$ 代入 (9.4.2), 得

$$S'_{3n} = \ln 4n + c + \varepsilon_{4n} - \frac{1}{2}(\ln 2n + c + \varepsilon_{2n})$$
$$- \frac{1}{2}(\ln n + c + \varepsilon_n) \to \frac{3}{2} \ln 2 \quad (n \to \infty).$$

再由

$$S'_{3n+1} = S'_{3n} + \frac{1}{4n+1} \to \frac{3}{2} \ln 2 \quad (n \to \infty),$$
$$S'_{3n+2} = S'_{3n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \to \frac{3}{2} \ln 2 \quad (n \to \infty),$$

我们推知重排后的级数收敛到 $\frac{3}{2}\ln 2$. 这说明了对于条件收敛的级数, 重排有可能改变级数的和.

对于条件收敛的级数, 我们有下面的一般性结果.

定理 9.4.4 (黎曼定理) 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛, 则对任意的 S(S 为有限实数或者 $\pm\infty$), 都存在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的重排 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$, 使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)} = S.$$

证明 对于条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 和

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}a_n^- = +\infty,$$

其中 $a_n^+, a_n^-(n = 1, 2, \cdots)$ 由 (9.4.1) 定义.

先设 $0 \leqslant S < +\infty$, 因此存在正整数 p_1, 使得

$$S < \sum_{k=1}^{p_1}a_k^+ \leqslant S + a_{p_1}^+,$$

同理存在正整数 q_1, 使得

$$S - a_{q_1}^- \leqslant \sum_{k=1}^{p_1}a_k^+ - \sum_{k=1}^{q_1}a_k^- < S.$$

由归纳法, 我们可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的一个重排

$$\begin{aligned}
&(a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+) - (a_1^- + \cdots + a_{q_1}^-)\\
&\quad + (a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+) - (a_{q_1+1}^- + \cdots + a_{q_2}^-) + \cdots\\
&\quad + (a_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + a_{p_k}^+) - (a_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + a_{q_k}^-)\\
&\quad + \cdots,
\end{aligned}$$

使得它满足

$$
\begin{aligned}
S < & (a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+) - (a_1^- + \cdots + a_{q_1}^-) \\
& + (a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+) - (a_{q_1+1}^- + \cdots + a_{q_2}^-) \\
& + \cdots + (a_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + a_{p_k}^+) \\
\leqslant & S + a_{p_k}^+
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
S - a_{q_k}^- \leqslant & (a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+) - (a_1^- + \cdots + a_{q_1}^-) \\
& + (a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+) - (a_{q_1+1}^- + \cdots + a_{q_2}^-) \\
& + \cdots + (a_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + a_{p_k}^+) - (a_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + a_{q_k}^-) \\
< & S.
\end{aligned}
$$

由 $q_k \geqslant k,\ p_k \geqslant k$, 知

$$
\lim_{k\to\infty} a_{p_k}^+ = \lim_{k\to\infty} a_{q_k}^- = 0.
$$

因此去掉括号得到重排后的级数也收敛到 S(见本章习题 13).

当 $S < 0$ 时, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$ 也条件收敛, 因此存在重排 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-a_{f(n)})$ 收敛于 $-S$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 收敛于 S.

当 $S = +\infty$ 时, 存在正整数 p_1, 使得

$$
\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ > 1 + a_1^-,
$$

同样存在正整数 p_2, 使得

$$
\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=p_1+1}^{p_2} a_k^+ > 2 + a_1^- + a_2^-.
$$

继续下去，由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = +\infty$，我们可取正整数 $p_3, p_4, \cdots, p_k$，使得

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=p_1+1}^{p_2} a_k^+ + \cdots + \sum_{k=p_{k-1}+1}^{p_k} a_k^+ > k + a_1^- + a_2^- + \cdots + a_k^-,$$

因此我们得到级数的重排

$$a_1^+ + \cdots + a_{p_1}^+ - a_1^- + a_{p_1+1}^+ + \cdots + a_{p_2}^+ - a_2^- + \cdots$$
$$+ a_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + a_{p_k}^+ - a_k^- + \cdots.$$

不难看出该级数必发散到 $+\infty$.

当 $S = -\infty$ 时，利用上述结果知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$ 存在重排，使得它发散到 $+\infty$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 存在重排，使得它发散到 $-\infty$. 证毕.

9.4.3　级数的乘法 (分配律)

现在我们来讨论级数的乘法问题. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为两个数项级数，类似于有穷项求和的乘法规则，作出两级数各项所有可能的乘积 $a_k b_j (k = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots)$，将它们排成以下的无穷矩阵 (称为这两个级数的**乘积矩阵**)：

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

任何将该矩阵中的元素排成一个序列的方法都将得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 乘积的一个表示. 显然，这个矩阵中元素的排序方式是多种多样的，我们常用的有对角线及正方形方法.

在用对角线方法排序时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的乘积为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$, 其中

$$c_n = \sum_{k+j=n+1} a_k b_j = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

用对角线方法得到的级数的乘积也称为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的**柯西乘积**.

在用正方形方法排序时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的乘积为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}d_n$, 其中

$d_1 = a_1 b_1,$

$d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$d_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$

分别记 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}d_n$ 的前 n 项部分和为 S_n, S'_n, S''_n, 则我们有 $S''_n = S_n S'_n$. 因此当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}d_n$ 也收敛, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}d_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$.

对于两个绝对收敛的级数的乘积, 我们有以下定理.

定理 9.4.5 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都绝对收敛, 则其乘积矩阵中所有元素的任何一个排列构成的级数也绝对收敛, 并且它的和为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty}b_n.$$

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{k_n}b_{j_n}$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$的乘积矩阵中所有元素的一个排列构成的级数, 其前 n 项部分和记为 $S_n(n = 1, 2, \cdots)$. 对

于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 记

$$M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{k_i, j_i\},$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{k_i} b_{j_i}| \leqslant \sum_{k=1}^{M_n} |a_k| \cdot \sum_{j=1}^{M_n} |b_j| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j|.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{k_n} b_{j_n}$ 绝对收敛. 由定理 9.4.3 知, 它的任何重排也绝对收敛并且和不变.

由于正方形方法排列得到的乘积 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$ 收敛到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$是在乘积矩阵中所有元素的一个排列构成的级数加上一些括号所得, 因此乘积矩阵中所有元素的任何一个排列构成的级数都收敛到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{k_n} b_{j_n}$ 收敛到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. 证毕.

例 9.4.1 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$, 证明: 当 $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与自身的柯西乘积发散.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与自身的柯西乘积为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, 则

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+n+1-k}}{k^\alpha (n+1-k)^\alpha} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha (n+1-k)^\alpha}.$$

由于

$$\frac{1}{k^\alpha (n+1-k)^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^{\frac{1}{2}} (n+1-k)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{2}{n+1},$$

因此对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|c_n| \geqslant \frac{2n}{n+1} \geqslant 1 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 发散.

值得注意的是, 该级数自乘的正方形方法排序得到的级数是收敛的. 请读者自证: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 与自身的柯西乘积是收敛的.

§9.5 无穷乘积

在本节中我们讨论无穷个数相乘的问题. 设 $\{a_n\}$ 是一个序列, 我们用 $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$表示该序列中所有项的乘积, 并称它为该序列的**无穷乘积**. 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 记

$$T_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

我们称它为该无穷乘积的前n 项**部分积**, 而称 $\{T_n\}$ 为该无穷乘积的**部分积序列**.

对于无穷乘积, 我们容易看出它的一个简单性质: 序列 $\{a_n\}$ 中若有一个元素为零, 则对所有充分大的 n 有 $T_n = 0$. 此时部分积序列不能给我们提供任何信息. 在 $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$ 的情形下, 部分积序列也对无穷乘积的研究很难提供有用的信息. 因此我们给出以下的定义.

定义 9.5.1 设 $\{a_n\}$ 是一个序列, $\{T_n\}$ 为无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的部分积序列. 若 $\lim_{n\to\infty} T_n = a$($a$为非零常数), 则称**无穷乘积**$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ **收敛**, 并记 $a = \prod_{n=1}^{+\infty} a_n$. 此时也称 a 为该无穷乘积的**积**. 若 $\{T_n\}$ 不收敛到一个非零常数, 则称**无穷乘积**$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$**发散**.

由上述定义, 我们容易推出下面的定理.

定理 9.5.1 若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

证明 对于 $n = 1, 2, \cdots$, 记 $T_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. 由 $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 设其积为 a, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{a}{a} = 1.$$

证毕.

根据定理 9.5.1, 若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon.$$

由于改变该乘积前面的有限多项 (不能变为 0) 不改变无穷乘积的收敛性. 因此收敛的无穷乘积的理论中基本上是对正数序列的无穷乘积的研究.

由定理 9.5.1, 我们可将无穷乘积表成 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n)$ 的形式, 不失一般性, 我们还可以假定 $|a_n| < 1 (n = 1, 2, \cdots)$. 在上述假定下, 我们容易建立以下定理.

定理 9.5.2 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n)$ 收敛的充分必要条件是数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ 收敛.

证明 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 记 $T_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k)$, 则有 $T_n = \mathrm{e}^{S_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 因此由 e^x 的连续性, 当 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 时, 有 $\lim_{n\to\infty} T_n = \mathrm{e}^S$; 反之, 当 $\lim_{n\to\infty} T_n = T > 0$ 时, 有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln T$. 证毕.

推论 若 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n)$ 收敛的充分必要条件是数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

证明 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 我们容易看出它与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ 同时收敛与发散. 由定理 9.5.2 立得推论. 证毕.

例 9.5.1 讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$ 的敛散性.

解 当 $x \leqslant 1$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ 发散, 知 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ 发散. 而当 $x > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ 收敛, 所以 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ 也收敛. 因此, $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ 当 $x > 1$ 时收敛, 当 $x \leqslant 1$ 时发散.

例 9.5.2 求无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left[1 - \frac{1}{(2n)^2}\right]$ 的积.

解 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left[1 - \frac{1}{(2n)^2}\right]$ 的前 n 项部分积为

$$T_n = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{1}{(2k)^2}\right] = \frac{\left[(2n-1)!!\right]^2}{\left[(2n)!!\right]^2}(2n+1).$$

在定积分中我们利用 $\sin^n x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的积分求出了 $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{2}{\pi}$, 因此

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left[1 - \frac{1}{(2n)^2}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

最后我们举一个有趣的例子结束本章.

我们已经知道, 当 $s > 1$ 时, 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ 是收敛的. 现在我们

来建立该级数与无穷乘积的联系. 对每个固定的 $s>1$, 令

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

首先我们观察

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s}=\sum\frac{1}{m^s},$$

在上式右边的求和中 m 将取遍所有奇数, 即所有不是 2 的整数倍的正整数. 然后再考虑

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)=\sum\frac{1}{m^s}-\sum\frac{1}{(3m)^s}=\sum\frac{1}{k^s},$$

在上式右边求和中 k 取遍所有不是 2,3 的整数倍的正整数. 依此类推, 取所有素数 $2,3,5,7,\cdots,p_n,\cdots$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\zeta(s)=1,$$

即

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

由上述等式我们易知素数的个数必定是无穷的. 事实上, 倘若结论不真, 设 p_N 为最大的素数, 则对任意的 $s>1$, 成立

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

上述等式的左边是有限个数相乘, 易见当 $s\to 1+0$ 时, 有

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)=\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)>0.$$

由于 $\lim\limits_{s\to 1+0}\zeta(s)=+\infty$, 从而 $\lim\limits_{s\to 1+0}\dfrac{1}{\zeta(s)}=0$. 此矛盾便证明了我们的结论.

习　题　九

1. 判断下列级数是否收敛, 若收敛, 请求其和:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$;　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$;　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}2^{nx}\ (x<0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}$;　(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(1+1/n)}$;　(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

2. 判断下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{2^{\beta n}}\ (\alpha,\beta>0)$;　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;　(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{\frac{3n}{2}}}\ (k>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$;　(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(1+1/n)^n}{\mathrm{e}}\right]^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}[\ln(n+1)-\ln n]\tan\frac{2}{n}$;　(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{a}-1)(a>0,a\neq1)$;

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]$;　(10) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$;

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}\ (a>0,k>1)$;　(12) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^p(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$;

(13) $\sum_{n=2}^{+\infty} n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; (14) $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha}\ (\alpha>0)$;

(15) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^{\ln n}}\ (\alpha>1)$; (16) $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$;

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right]^p\ (p>0)$; (18) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-n\sin\frac{1}{n}}{n^\alpha}\ (\alpha>0)$.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 且 $\{a_n\}$ 是单调下降的序列. 证明

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0.$$

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有定义, 且 $f(0)=0$ 和 $f''(0)$ 存在. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛的充分必要条件是 $f'(0)=0$.

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 并且对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $a_n>0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛. 再设 $\{a_n\}$ 是单调序列, 证明这两个级数具有相同的敛散性.

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 并且对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $a_n>0$, 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛;

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散; (4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 并且对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $a_n>0$; 对于 $\forall k\in\mathbb{N}$,

记 $r_k=\sum_{n=k}^{+\infty}a_n$. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散.

9. 设正数序列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$ $(n\geqslant 1)$, 证明：如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛.

10. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ $(p>0)$;

(2) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n)^2}$;

(4) $$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots;$$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-n\ln\frac{n+1}{n}\right)$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\arctan^{\alpha}n$ $(\alpha\in\mathbb{R})$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$;

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n\alpha}{n}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

11. 讨论下列级数的敛散性及绝对敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ $(\alpha>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

12. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 试问: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 是否一定收敛?(说明理由)

13. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为一个数项级数, 对它的一些项加上括号后得到级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$. 假定对每个 $k \in \mathbb{N}$, A_k 中的每个加数都具有相同的符号. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是 $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ 收敛.

14. 举例说明存在级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 具有不同的敛散性.

15. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 而序列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = o(a_n)(n \to \infty)$, 试问: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 是否一定收敛?

16. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

17. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的部分和序列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ (n = 1, 2, \cdots)$ 是有界序列, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

18. 设 $p > 0$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p$ 收敛. 试证明如下

的 Minkowski 不等式：

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

19. 设 $p,q>0$, 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n|^q$ 收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 绝对收敛, 并且有如下赫尔德不等式：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_nb_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^4$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nn^{-\frac{4}{5}}$ 绝对收敛.

21. 设序列 $\{a_n\}$ 满足：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 存在和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

22. 设对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $a_n>0$, 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 也收敛.

23. 设非常数函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续、非负, 并且 $f(x)\leqslant 1$ $(x\in[0,1])$; 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 令 $a_n=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ 发散.

24. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}$;　　(2) $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}(1-n^{-2})$;

(3) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$;　　(4) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(5) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^p}\right)$ $(p>0)$;

(6) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{n^2}}$;

(7) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

(8) $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

25. 证明下列等式.

(1) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}$;

(3) $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2-4}{n^2-1}=\dfrac{1}{4}$.

26. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛, 假定 $|a_n|<\dfrac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$, 证明无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+a_n\right)$ 收敛.

27. 试构造一个发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 使得无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛.

第十章　函数序列与函数项级数

我们知道数学分析主要是研究函数的一门学科. 到目前为止, 我们经常遇到的函数, 除了一些很特别的函数外 (如黎曼函数, 狄利克雷函数等), 大都是一些初等函数. 一个重要的问题是: 是否存在更为广泛的函数类呢? 例如, 是否存在处处连续但处处不可导的函数呢? 再如, 设 $\{n_k\}$ 是一个严格单调上升的正整数序列, 是否存在 $C^\infty(-\infty,+\infty)$ 的函数 $f(x)$, 满足当 $i \in \{n_k\}$ 时, $f^{(i)}(0)=1$, 而当 $i \notin \{n_k\}$ 时, $f^{(i)}(0)=0$ 呢? 仅用前面所学的知识, 似乎很难解决这类问题. 另外, 人们还希望利用简单函数来逼近复杂的函数, 以达到对复杂函数的深入研究. 若要研究上述这些问题, 我们不可避免地要遇到函数序列或函数项级数.

在本章中, 我们将对函数序列及函数项级数进行系统地学习. 本章内容在今后几章和许多后续课程中均起着重要作用.

§10.1　函数序列与函数项级数的基本问题

设有一个序列 $\{f_n(x)\}$, 其中序列的第 n 项是一个函数 $f_n(x)$, 而所有 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都有一个共同的定义域 $I_0 \subset \mathbb{R}$. 对于这样的序列, 我们今后称之为定义在 I_0 上的**函数序列**或称该函数序列在 I_0 上是有定义的. 对于固定的点 $x_0 \in I_0$, 该函数序列在点 x_0 的取值组成了一个序列 $\{f_n(x_0)\}$. 若该序列收敛, 我们则称**函数序列在 x_0 处收敛**, x_0 也称为该函数序列的**收敛点**. 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的所有收敛点的集合称为它的**收敛域**. 设 $\{f_n(x)\}$ 的收敛域为 $I \neq \varnothing$, 则对 $x \in I$, 我们得到 I 上的一个函数 $f(x)$, 它的定义为: $\forall x \in I$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. $f(x)$ 也称为 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上的**极限函数**.

同样我们可以考虑和式 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$, 其中 $\{u_n(x)\}$ 是定义在集合 I_0 上的一个函数序列. 今后我们称该和式为定义在 I_0 上的**函数项级数**(简称级数) 或称该函数项级数在 I_0 有定义. 记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ $(n=1,2,\cdots)$, 称之为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和, 并称 $\{S_n(x)\}$ 为该函数项级数的部分和序列. 若 $\{S_n(x)\}$ 在 $x_0\in I_0$ 处收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 x_0 处收敛, x_0 称为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的一个**收敛点**, 其收敛点的全体称为 $\sum\limits_{n-1}^{+\infty}u_n(x)$ 的**收敛域**. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 I, 则对于 $\forall x\in I$, 记

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),$$

并称 $S(x)$ 为该函数项级数在 I 上的**和函数**.

从以上的定义来看, 求函数序列的极限函数 $f(x)$ 与函数项级数的和函数 $S(x)$ 实质上是分别求序列的极限和数项级数的和.

由函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 收敛性的定义, 它的敛散性可以转化为函数序列 $\left\{S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right\}$ 的敛散性问题. 反过来, 对于函数序列 $\{f_n(x)\}$, 则它的敛散性也可转化为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[f_n(x)-f_{n-1}(x)]$ (令 $f_0(x)\equiv 0$) 的敛散性问题.

在本章中, 我们所关心的是极限 (和) 函数与函数序列 (函数项级数) 中的函数之间具有什么联系? 为此我们先来看以下例子.

例 10.1.1 函数序列 $f_n(x)=x^n\ (n=1,2,\cdots)$ 的收敛域是 $(-1,1]$, 其极限函数是

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

注意到函数序列 $\{x^n\}$ 中的每一个函数都是连续函数, 其极限函数在 $(-1,1)$ 内连续, 但在 $(-1,1]$ 上却不连续. 同时我们还注意到对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 均为可导函数, 但其极限函数却在 $x=1$ 处左导数不存在.

例 10.1.2 设 $f_n(x)=nx(1-x^2)^n\ (x\in[0,1],n=1,2,\cdots,)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\equiv 0,\quad x\in[0,1],$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\\ &\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

例 10.1.3 设 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}\ (n=1,2,\cdots)$, 显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\equiv 0=f(x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

但对 $n=1,2,\cdots$, 有

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx.$$

容易看出 $\{f_n'(x)\}$ 在许多点是不收敛的, 因此该函数序列的导函数序列不收敛于 $f(x)$ 的导数.

例 10.1.4 设 $f_n(x)=\dfrac{2x}{\pi}\arctan nx\ (n=1,2,\cdots)$, 显然

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=|x|=f(x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

而对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$f_n'(x)=\frac{2}{\pi}\arctan nx+\frac{2nx}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

容易看出 $\{f_n'(x)\}$ 处处收敛, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

在讨论函数序列 (函数项级数) 时, 一个十分重要的问题是研究其极限函数 (和函数) 能从该函数序列 (函数项级数) 继承到什么样的性质, 其中主要的有以下三方面的问题 (我们主要对函数序列叙述, 读者不难对函数项级数提出相应的问题):

(1) 若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是区间 I 上的连续函数, 其极限函数 $f(x)$ 是否为 I 上的连续函数?

(2) 若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 其极限函数 $f(x)$ 是否为 $[a,b]$ 上的可积函数? 若 $f(x)\in R[a,b]$, 是否成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x?$$

(3) 若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是区间 I 上的可导函数, 其极限函数 $f(x)$ 是否为可导函数? 若可导, 是否成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)=f'(x)$?

在上面的这些例子中, 我们可以发现: 一般来说, 上述的回答都是否定的. 因此我们必须对所给的函数序列 (函数项级数) 加上一些条件, 才有可能得到肯定的回答. 在本章以下几节中, 我们将主要研究这些问题.

§10.2 一致收敛的概念

在上节中, 我们发现了很多极限函数 (和函数) 没有保留函数序列 (函数项级数) 中每个函数的相应性质. 因此一个重要的问题是: 在什么条件下才能保证极限函数能保留相应函数序列中的函数的性质呢? 为此让我们再来考查一下函数序列 $\{f_n(x)=x^n\}$. 在上节中我们已知其收敛域为 $(-1,1]$, 极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

我们发现 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内还是保持了函数的连续性, 不仅如此, 当 $x\in(-1,1)$ 时, 还可容易地证明

$$\lim_{n\to\infty}(x^n)' = \lim_{n\to\infty} nx^{n-1} = 0 = (\lim_{n\to\infty} x^n)'.$$

为什么极限函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不是左连续的呢? 我们可以粗略地先来分析一下. 极限函数 $f(x)$ 它在 $x=1$ 左连续与它在 $x=1$ 左边邻域的函数值有关, 而现在 $f(x)$ 的函数值是 $\{x^n\}$ 的极限. 尽管当 n 趋于 ∞ 时,$\{x^n\}$ 在 $(1-\delta,1)$ 中都趋于零, 但当 x 靠近 1 时, 使得 x^n 接近零所需要的 n 也越大 (见图 10.2.1). 换句话说, 对任给 $\varepsilon>0$, 不管 n 多么大, 对每个固定的 n, $|x^n-f(x)|<\varepsilon$ 在 $(1-\delta,1)$ 中不能对所有的 x 同时成立. 因此极限函数就很难保持函数序列中的每一个固定函数所具有的特性了.

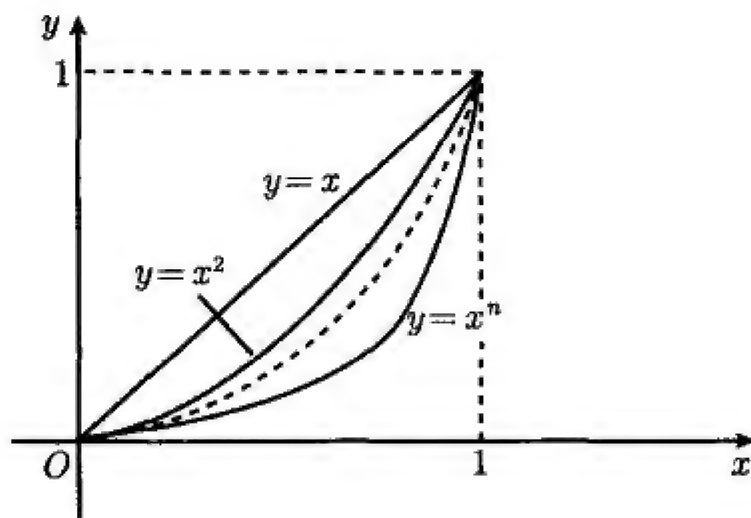


图 10.2.1

另一方面, 在 $(-1,1)$ 中极限函数 $f(x)\equiv 0$ 与函数序列 $\{x^n\}$ 收敛到零的过程具有何种联系呢?

我们知道 $f(x)$ 在 x_0 处连续是一个局部的性质. 换句话说, $f(x)$ 在 x_0 处是否连续只与 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内的函数值有关. 设 $x_0\in(-1,1)$, 可先取定 δ_0 充分小, 使得 $[x_0-\delta_0,x_0+\delta_0]\subset(-1,1)$. 由 $f(x)$ 在 x_0 处连续的定义, 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ (\delta<\delta_0)$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

换句话说, $f(x)$ 在 x_0 处连续本质上是 $f(x)$ 在 x_0 的附近变化不大. 而在 $[x_0-\delta_0,x_0+\delta_0]$ 中, 由于 $(x_0-\delta_0)^n\to 0$ 与 $(x_0+\delta_0)^n\to 0$, 从而 $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|x^n - f(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$ 成立. 特别地, 对一切 $x \in [x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$, 有

$$|x^{N+1} - f(x)| < \varepsilon.$$

上式说明, 在整个区间 $[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$ 上, $f(x)$ 与一个连续函数 x^{N+1} 的差的绝对值可以小于任意给定的正数. 由于 x^{N+1} 在 x_0 附近的变化不大, 从而 $f(x)$ 在 x_0 附近的变化也不大, 因此我们从 n 充分大时 x^n 的连续性就可以推出 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性.

从上面的分析可以看出 $\{x^n\}$ 在 $(-1,1)$ 中的收敛性与在 $[a,b] \subset (-1,1)$ 中的收敛性具有本质的区别. 对于后者的收敛性, 我们引入以下的重要概念.

定义 10.2.1　设 $f(x), f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数. 若对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in I$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ **在 I 上一致收敛于** $f(x)$, 记为 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in I)$.

显然, 当 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in I)$ 时,$\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛于 $f(x)$.

对于函数项级数, 我们有

定义 10.2.2　设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 为定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数项级数. 若存在 I 上的函数 $S(x)$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的部分和序列 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ **在 I 上一致收敛于** $S(x)$.

用 "ε-N" 语言来叙述函数项级数的一致收敛性, 我们有: 若对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in I$, 有

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon,$$

则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

下面我们来研究一下一致收敛的几何意义. 设 $\{f_n(x)\}$ 为定义在 $I=[a,b]$ 上的函数序列. 从几何上来看, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 则 $y=f(x)\pm\varepsilon\ (x\in I)$ 的图像与 $x=a,x=b$ 围成了一个带形区域. 当 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 时, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $f_n(x)$ 在 I 上的图像整个地落在该带形区域内 (见图 10.2.2).

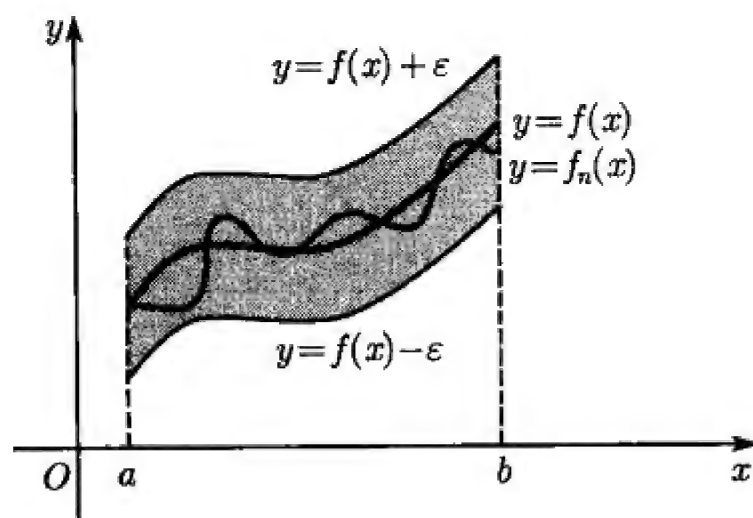


图 10.2.2

例 10.2.1 试讨论函数序列 $f_n(x)=x^n\ (n=1,2,\cdots)$ 在

(1) $(-r,r)\,(0<r<1)$ 内的一致收敛性;

(2) $(-1,1)$ 内的一致收敛性.

解 我们已经知道 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\equiv 0, x\in(-1,1)$.

(1) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $r^n\to 0\,(n\to\infty)$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $|r^n|<\varepsilon$. 因此当 $n>N$ 时, 对于 $\forall x\in(-r,r)$, 都有

$$|x^n-0|\leqslant|r^n|<\varepsilon.$$

由一致收敛的定义我们有 $x^n\rightrightarrows 0\,(x\in(-r,r))$.

(2) 为了讨论 $f_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的一致收敛性, 我们首先用肯定的语气来叙述一个函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$.

若存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $N>0$, 存在 $n'>N$ 以及 $x'\in I$, 使得

$$|f_{n'}(x')-f(x')|\geqslant\varepsilon_0,$$

则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$.

现在我们来证明 $\{x^n\}$ 在 $(-1,1)$ 内不一致收敛于零.

事实上, 存在 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$, 对任意 $N>0$, 存在 $n'=N+1>N$, 由于 $\lim\limits_{x\to1}x^{n'}=1$(对固定的 n'), 因此存在 $0<x'<1$, 使得

$$|(x')^{n'}-0|=(x')^{n'}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

这就证明了 $\{x^n\}$ 在 $(-1,1)$ 内不一致收敛于零.

例 10.2.2 设函数 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $f(1)=0$, 证明:

$$x^nf(x)\rightrightarrows0\quad(x\in[0,1]).$$

证明 对于 $\forall x\in[0,1]$, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^nf(x)=0$.

现证一致收敛性. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(1-\delta,1]$ 时, 有

$$|f(x)-0|<\varepsilon,$$

从而对于 $\forall x\in(1-\delta,1]$ 及 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$|x^nf(x)|\leqslant|f(x)|<\varepsilon. \tag{10.2.1}$$

设 $\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}=M$, 对于 $\forall x\in[0,1-\delta]$, 则有

$$|x^nf(x)|\leqslant M(1-\delta)^n.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta)^n=0$, 所以 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 对于 $\forall x\in[0,1-\delta]$, 有

$$|x^nf(x)|<\varepsilon.$$

注意到当 $x \in (1-\delta, 1]$ 时, 对任意的 n, (10.2.1) 成立, 从而当 $n > N$ 时, 对于 $\forall x \in [0,1]$, 有 $|x^n f(x) - 0| < \varepsilon$. 因此 $x^n f(x) \rightrightarrows 0\,(x \in [0,1])$.

例 10.2.3 试讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2x](1+n^2x)}$ 在

(1) $[a, +\infty)\ (a > 0)$ 上的一致收敛性;

(2) $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 和 $\forall x \in (0, +\infty)$, 记

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)x}{[1+(k+1)^2x](1+k^2x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)^2x},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \frac{1}{1+x}.$$

因此我们有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2x](1+n^2x)}, \quad x \in (0, +\infty).$$

(1) 当 $x \in [a, +\infty)$ 时, 我们有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{1+(n+1)^2x} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2a}.$$

因此对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$0 < \frac{1}{1+(n+1)^2a} < \varepsilon,$$

从而当 $n > N$ 时, 对于 $\forall x \in [a, +\infty)$, 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2x](1+n^2x)}$ 在 $[a, +\infty)\ (a > 0)$上一致

收敛.

(2) 当 $x \in (0,+\infty)$ 时, 我们观察到: $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 对于 $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n' = N+1 > N$, $\exists x' = \frac{1}{(N+1)^2}$, 使得

$$|S_{N+1}(x') - S(x')| = \frac{1}{1+(N+1)^2\frac{1}{(N+1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

这说明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2x](1+n^2x)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

从定义可以看出, 函数序列的一致收敛具有以下简单性质:

(1) 当函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 一致收敛时, 若 $I' \subset I$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 I' 也一致收敛. 另外若 $\{f_n(x)\}$ 分别在 $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛, 则它在 $I_1 \cup I_2$ 上也一致收敛.

(2) 若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上均一致收敛, 则对 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}$ 在 I 上也一致收敛.

容易看出, 对函数项级数而言, 上述两个相应的性质也成立.

人们不禁要问: 如果两个函数序列 $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ 都在 $I \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛, 是否 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上还一致收敛呢? 一般来说, 答案是否定的. 例如, 取 $I = (0,1)$, $f_n(x) = (1-x)x^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 由前面例 10.2.2 知, $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛. 另外, 令 $g_n(x) = \frac{1}{1-x}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{g_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛. 由于 $f_n(x)g_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 从而 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 内不一致收敛.

定义 10.2.3 设 $\{f_n(x)\}$ 为定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数序列. 若存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 和 $\forall x \in I$, 有 $|f_n(x)| \leqslant M$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上**一致有界**.

若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 都一致收敛, 并且都是一致有界的, 则可以证明 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛 (见本章习题).

§10.3 函数序列与函数项级数一致收敛的判别法

如果一个函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 此时函数序列中 $f_n(x)$ 是点点收敛于 $f(x)$. 要判别函数序列 (函数项级数) 是否一致收敛, 一个基本的原则是: 将已有的点点收敛的判别法中的条件换成关于 $x \in I$ 中一致成立, 这样便能得到相应的关于一致收敛的判别法则.

10.3.1 柯西准则

对于函数序列的一致收敛, 我们首先有以下的柯西准则.

定理 10.3.1 (柯西准则) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数序列, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N$ 时, 对一切 $x \in I$, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

证明 *必要性* 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,(x \in I)$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 对于 $\forall x \in I$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $n, m > N$ 时, 对于 $\forall x \in I$, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

必要性得证.

充分性 设 $\{f_n(x)\}$ 满足: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N$ 时, 对一切 $x \in I$, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

特别地, 上式对每个固定的点 $x \in I$ 也成立, 从而序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 设其极限为 $f(x)$, 因此我们在区间 I 上可得到 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数 $f(x)$.

在

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

中令 $m\to\infty$, 我们有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

对一切 $n>N$ 及 $x\in I$ 成立. 这就证明了 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in I)$. 证毕.

对于函数项级数, 我们有

定理 10.3.1′ (柯西准则)　设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$是定义在 $I\subset\mathbb{R}$ 上的函数项级数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I上一致收敛的充分必要条件是: 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>m>N$ 时, 对一切 $x\in I$, 有 $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}u_k(x)\right|<\varepsilon$.

定理 10.3.1′ 的证明留给读者.

从定理 10.3.1′ 可以推出下面有用的推论.

推论　设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$是定义在 $I\subset\mathbb{R}$ 上的函数项级数, 并且它在 I 上一致收敛, 则 $u_n(x)\rightrightarrows 0\,(x\in I)$.

例 10.3.1　设函数 $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在开区间 (a,b) 内一致收敛. 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明　由于 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内一致收敛, 由柯西准则, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n,m>N$ 时, 对于 $\forall x\in(a,b)$, 有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对每个 $n,m>N$, 由于 $f_n(x),f_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此在上述不等式中令 $x\to a+0$ 和 $x\to b-0$ 得

$$|f_n(a)-f_m(a)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

和

$$|f_n(b)-f_m(b)|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

这说明当 $n,m>N$ 时, 对一切 $x\in[a,b]$, 有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

再由柯西准则知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

读者同样可以证明以下结果:

例 10.3.1′ 设函数 $u_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在开区间 (a,b) 内一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在 $[a,b]$ 上一致收敛.

例 10.3.2 试讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ 在

(1) $[a,+\infty)\,(a>0)$ 上的一致收敛性;

(2) $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

证明 显然, 对任意固定的 $x\in(0,+\infty)$, 该级数为一个莱布尼茨交错级数, 因此是收敛的. 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 记

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{1+kx} \quad 及 \quad S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

(1) 当 $x\in[a,+\infty)$ 时, 由交错级数余项的性质得 (见定理 9.3.1 推论后面的注)

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+kx}\right|\leqslant\frac{1}{1+(n+1)x}\leqslant\frac{1}{1+(n+1)a}.$$

由于对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{1}{1+(n+1)a}<\varepsilon,$$

因此当 $n>N$ 时, 对于 $\forall x\in[a,+\infty)$, 有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 注意到 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$上一致收敛, 由例 10.3.1′ 知它在 $x=0$ 必收敛. 由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(0)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ 是发散的, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

注　(2) 也可以用以下的方法证明. 由定理 10.3.1′ 的推论可知, 我们只要证明 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ 在 $(0,+\infty)$上不一致收敛到零即可. 事实上, $\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$, 对于 $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists N+1>N$ 及 $x'=\dfrac{1}{N+1}\in(0,+\infty)$, 使得

$$\left|\frac{(-1)^{N+1}}{1+(N+1)x'}\right|=\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

10.3.2　一致收敛的判别法

柯西准则是一个在理论上非常重要的定理, 但有时在具体应用上不是很方便. 以下的判别法在实用上是比较方便的.

定理 10.3.2　设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 $I\subset\mathbb{R}$ 上有定义, 则 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in I)$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}=0$.

证明　*必要性*　设 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in I)$, 则对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in I$, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此我们有

$$0\leqslant\sup_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}=0$. 必要性得证.

充分性 由于对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\sup_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}<\varepsilon,$$

因此, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\sup_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}<\varepsilon,$$

此即 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in I)$. 证毕.

以上定理告诉我们, 当我们知道一个函数序列的极限函数时, 判断它的一致收敛性的问题可转化为求上确界以及讨论序列的收敛性问题, 以上的判别法被人们称为**最值判别法**.

例 10.3.3 试讨论$f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}\,(x\in(-\infty,+\infty),n=1,2,\cdots)$ 的一致收敛性.

解 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 不难看出 $f_n(x)\to 0\,(n\to\infty)$. 对每个固定的 n, 我们来求 $|f_n(x)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的上确界. 由于 $f_n(x)$ 是奇函数且 $f_n(x)\geqslant 0\,(x\geqslant 0)$, 因此只要计算 $f_n(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时的上确界即可.

由

$$f_n'(x)=\frac{(1+n^2x^2)-x\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0$$

得 $x=\pm\dfrac{1}{n}$, 注意到 $f(0)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$, 知 $f_n(x)$ 在 $\dfrac{1}{n}$ 取到最大值 $\dfrac{1}{2n}$.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-0|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

所以 $\dfrac{x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0\,(x\in(-\infty,+\infty))$.

例 10.3.4 证明函数序列 $f_n(x)=n^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\dfrac{1}{nx}(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,+\infty)\,(a>0)$ 上一致收敛.

证明 对每个 $x\in[a,+\infty)$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{nx}}{\dfrac{1}{nx}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{nx}}-1}{\dfrac{1}{nx}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}.$$

注意到当 $t\to0$ 时, 有

$$\mathrm{e}^t-1\sim t+o(t),\quad \sin t\sim t+o(t),$$

从而当 $x\in[a,+\infty)$ 且 $n\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|n^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{x^2}\right|&=n^2\left|(\mathrm{e}^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{n^2x^2}\right|\\&=n^2\left|\left[\frac{1}{nx}+o\left(\frac{1}{nx}\right)\right]\left[\frac{1}{nx}+o\left(\frac{1}{nx}\right)\right]-\frac{1}{n^2x^2}\right|\\&=n^2o\left(\frac{1}{n^2x^2}\right).\end{aligned}$$

因此我们有

$$\sup_{x\in[a,+\infty)}\left|n^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{x^2}\right|\leqslant n^2o\left(\frac{1}{n^2a^2}\right)\to0\quad(n\to\infty).$$

这就证明了 $f_n(x)\rightrightarrows\dfrac{1}{x^2}\,(x\in[a,+\infty))$.

对于函数项级数来说, 我们也可以对其部分和序列利用定理 10.3.2 来判别其收敛性. 如我们可以用定理 10.3.2 来讨论 $\left\{\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right\}$, 从而可以解决 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 内的一致收敛性问题. 但在一般情形, 要求出一个函数项级数部分和序列的通项表达式不是一件容易的事情, 因此就很难用定理 10.3.2 来判别其一致收敛性.

对于函数项级数, 我们有以下的概念.

定义 10.3.1 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 是定义在 I 上的函数项级数, 并且 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$ 在 I 上一致收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上**绝对一致收敛**.

利用柯西准则, 读者易于证明, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛, 则它在 I 上一致收敛.

对于函数项级数, 以下的判别法是经常用到的.

定理 10.3.3 (魏尔斯特拉斯 M 判别法) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 有定义. 若存在正数序列 $\{M_n\}$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 对一切 $x \in I$, 有

$$|u_n(x)| \leqslant M_n,$$

并且 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛.

证明 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛, 根据数项级数收敛的柯西准则, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon.$$

从而对一切 $x \in I$, 有

$$\sum_{k=m+1}^{n} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon,$$

再由函数项级数一致收敛的柯西准则知 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛. 证毕.

例 10.3.5 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-nx}\,(k>1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 对每个正整数 n, 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $u_n(x)=x^k\mathrm{e}^{-nx}>0$. 注意到 $u_n(0)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k\mathrm{e}^{-nx}=0\,(n=1,2,\cdots)$, 因此 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上取到最大值. 由

$$u_n'(x)=kx^{k-1}\mathrm{e}^{-nx}-nx^k\mathrm{e}^{-nx}=0$$

得 $x=0$ 和 $x=\dfrac{k}{n}$. 因此 $u_n(x)$ 在 $x=\dfrac{k}{n}$ 取最大值 $\mathrm{e}^{-k}\dfrac{k^k}{n^k}$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k}\dfrac{k^k}{n^k}$ 当 $k>1$ 时收敛, 由魏尔斯特拉斯 M 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^k\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

对于不是绝对一致收敛的函数项级数, 我们有下面的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法.

定理 10.3.4 (狄利克雷判别法) 设函数序列 $u_n(x), v_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $I\subset\mathbb{R}$ 上有定义, 并且满足以下条件:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的部分和序列在 I 上一致有界, 即存在 $M>0$, 使得对于 $\forall n\geqslant 1$ 及 $\forall x\in I$, 有

$$|S_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant M;$$

(2) 对每个 $x\in I, \{v_n(x)\}$ 关于 n 是单调的, 且 $v_n(x)\rightrightarrows 0\,(x\in I)$,

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 由条件 (1), 当 $n>m\geqslant 1$ 时, 对一切 $x\in I$, 我们有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}u_k(x)\right|=|S_n(x)-S_m(x)|\leqslant 2M.$$

由 $v_n(x) \rightrightarrows 0\,(x \in I)$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 对于 $\forall x \in I$ 有

$$|v_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}.$$

注意到对每个 $x \in I, \{v_k(x)\}$ 关于 n 是单调的, 如同数项级数的狄利克雷判别法的证明, 利用阿贝尔变换 (引理 7.5.4) 知, 当 $n > m > N$ 时, 对 $\forall x \in I$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant M(|v_{m+1}(x)| + 2|v_n(x)|) < \varepsilon.$$

由柯西准则知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛. 证毕.

定理 10.3.5 (阿贝尔判别法) 设函数序列 $u_n(x), v_n(x)\,(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上有定义, 并且满足以下条件:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛;

(2) 对固定的 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 关于 n 是单调函数, 且 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界,

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 由条件 (2), 存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall n \geqslant 1$ 及 $\forall x \in I$, 有

$$|v_n(x)| \leqslant M.$$

再由 (1) 及柯西准则, 对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > m > N$ 时, 对一切 $x \in I$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}.$$

由于 $\{v_n(x)\}$ 关于 n 是单调的, 由阿贝尔变换 (引理 7.5.4), 对任意

的 $n>m>N$ 及 $\forall x\in I$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}u_k(x)v_n(x)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}[|v_{m+1}(x)|+2|v_n(x)|]<\varepsilon.$$

再由柯西准则知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛. 证毕.

回忆一下, 在数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 的阿贝尔判别法的证明中, 我们直接设单调序列 $\{b_n\}$ 的极限为 b, 然后对 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(b_n-b)$ 应用狄利克雷判别法即可得到证明. 对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)v_n(x)$ 而言, 对每点 $x\in I$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n(x)$ 存在, 因此我们也有极限函数 $v(x)$. 为了要应用函数项级数的狄利克雷判别法, 我们必须要证明 $v_n(x)\rightrightarrows v(x)\,(x\in I)$. 这个结论是否正确呢? 一般来说此结论是不成立, 例如 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上关于 n 单调并且一致有界, 但 $\{x^n\}$ 在该区间上并不一致收敛.

例 10.3.6 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ 在

(1) $[0,+\infty)$ 上一致收敛;

(2) 任何不含负整数点的闭区间 I 上一致收敛;

(3) 任何区间 I 上不绝对收敛.

证明 (1) 对任意的正整数 n, 令 $u_n(x)=(-1)^n$, 则对于 $x\in[0,+\infty)$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant 1.$$

令 $v_n(x)=\dfrac{1}{n+x}(n=1,2,\cdots)$, 显然 $v_n(x)$ 对一切 $x\in[0,+\infty)$ 均是关于 n 单调下降的函数, 且当 $x\in[0,+\infty)$ 时, 有

$$|v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此对于 $x \in [0,+\infty)$, 有

$$v_n(x) \rightrightarrows 0 \quad (x \in [0,+\infty)).$$

根据狄利克雷判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 若闭区间 $I \subset [0,+\infty)$, 显然结论成立. 不妨设 $I \subset (-K,-K+1)$, $K \in \mathbb{N}$. 如同 (1), 我们容易验证: 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 及 $\forall x \in I$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x)\right| \leqslant 1$. 当 $n > K$ 时, $v_n(x)$ 对于 $x \in I$ 均是关于 n 单调上升的且 $v_n(x) \rightrightarrows 0 (x \in I)$. 因此由狄利克雷判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ 在 I 上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x}$ 对所有非负整数的点 x, 当 n 充分大时, 均是正项级数, 且 $\frac{1}{n+x} \sim \frac{1}{n}(n \to \infty)$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x}$ 也发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ 在任何区间都不是绝对收敛.

例 10.3.7 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.

证明 必要性是显然的, 现证充分性.

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛, 在

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{nn^{x-1}}$$

中, 对于 $n=1,2,\cdots$, 我们令

$$u_n(x)=\frac{a_n}{n},\quad v_n(x)=\frac{1}{n^{x-1}}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛, 故它在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛. 由于 $\{v_n(x)\}$ 对固定的 x 是 n 的单调函数, 且对于 $\forall\, x\in[1,+\infty)$ 及 $\forall\, n\in\mathbb{N}$, 有

$$|v_n(x)|=\left|\frac{1}{n^{x-1}}\right|\leqslant 1,$$

根据阿贝尔判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.

例 10.3.8 试讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在区间 $[0,1]$ 上的

(1) 一致收敛性;

(2) 绝对收敛性;

(3) 绝对一致收敛性.

解 (1) 取 $u_n(x)=(-1)^n$, $v_n(x)=(1-x)x^n\,(n=1,2,\cdots)$, 则 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right\}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界, 而 $v_n(x)$ 对固定的 x 是 n 的单调下降函数, 而且 $v_n(x)\rightrightarrows 0\,(x\in[0,1])$ (见例 10.2.2). 根据狄利克雷判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(2) 对于 $n=1,2,\cdots$, 记

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(1-x)x^n=\begin{cases}x-x^{n+1}, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

注意当 $x\in[0,1)$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=x.$$

因此当 $x \in [0,1]$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|$ 收敛, 从而原级数在 $[0,1]$ 上绝对收敛.

(3) 继续使用 (2) 中的记号. 由于在 $[0,1)$ 中 $|S_n(x)-S(x)|=x^{n+1}$, 而我们已经知道 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$不是绝对一致收敛的.

此例说明了即使一个函数项级数在一个区间上一致收敛并且绝对收敛, 但该级数在该区间上不一定绝对一致收敛.

§10.4 一致收敛的函数序列和函数项级数

在本节中, 我们来讨论一致收敛的函数序列 (函数项级数) 的极限函数 (和函数) 的性质, 并且回答 §10.1 中提出的问题.

10.4.1 极限函数的连续性

定理 10.4.1 设函数 $f_n(x) \in C[a,b]\,(n=1,2,\cdots)$, 且 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,(x \in [a,b])$, 则 $f(x) \in C[a,b]$.

证明 任取 $x_0 \in [a,b]$, 我们证 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,(x \in [a,b])$, 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a,b]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取定 $n_0 > N$(例如取 $n_0 = N+1$), 由于 $f_{n_0}(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 从而存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b]$ 时, 有

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此当 $x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b]$ 时, 有

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(x_0)|\\ &\quad\leqslant |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\\ &\quad< \varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

注 仿照定理 10.4.1 的证明方法我们可以证明以下结果: 设$\{f_n(x)\}$是定义在 $[a,b]\backslash\{x_0\}$ 上的函数序列, 其中 $x_0 \in [a,b]$. 如果 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $(x \in [a,b]\backslash\{x_0\})$, 并且对每个 $n\geqslant 1$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=c_n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ 存在, 并且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

对函数项级数, 用完全类似于定理 10.4.1 的证明方法, 可以证明

定理 10.4.1′ 设函数 $u_n(x) \in C[a,b]\,(n=1,2,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上连续.

注 用类似的方法我们还可以证明以下结论: 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $I\backslash\{x_0\}$ 上一致收敛, 且对每个 $n\geqslant 1$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

从定理 10.4.1 我们可知, 当连续的函数序列 $\{f_n(x)\}$(即对每个 n, $f_n(x)$ 连续) 一致收敛时, 有以下极限顺序的交换性, 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

从定理 10.4.1′ 可知, 当连续的函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$(即对每个 $n, u_n(x)$ 连续) 一致收敛时, 有以下极限号与求和号的可交换性

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

我们曾经多次指出, 函数连续是一个局部性的概念. 换句话说, 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续仅与 $f(x)$ 在 x_0 附近的函数值有关. 因此若一个连续函数序列在 x_0 的一个邻域内一致收敛到 $f(x)$(此时也称它

在 x_0 处是**局部一致收敛**的), 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 在数学的一些分支中, 以下内闭一致收敛的概念经常用到.

定义 10.4.1 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ $\left(\text{函数项级数} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)$ 在区间 I 上有定义, 若对任何的闭区间 $[a,b]\subset I$, $\{f_n(x)\}$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则称 $\{f_n(x)\}$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)$ 在 I**内闭一致收敛**.

读者不难证明, 对于开区间 I 来说, 内闭一致收敛等价于局部一致收敛. 因此我们有

推论 (1) 设函数 $f_n(x)\in C(a,b)\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内闭一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)\in C(a,b)$;

(2) 设函数 $u_n(x)\in C(a,b)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内闭一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的和函数在 (a,b) 内连续.

我们前面已经知道 $\{x^n\}$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛, 从而它的极限函数 0 在 $(-1,1)$ 中连续.

例 10.4.1 设 $\{a_n\}$ 是一个单调序列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\sin nx$ 的和函数在 $(0,2\pi)$ 内连续.

证明 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 令

$$u_n(x)=a_n,\quad v_n(x)=\cos nx.$$

下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 $(0,2\pi)$内闭一致收敛. 事实上, 任取闭区间 $[\delta_0,2\pi-\delta_0](\delta_0>0)$, 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta_0}{2}}.$$

由于 $u_n(x)$ 与 x 无关, $\{u_n(x)\}$ 关于 n 单调且在 $[\delta_0,2\pi-\delta_0]$ 上一致趋于零, 根据狄利克雷判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$ 在 $[\delta_0,2\pi-\delta_0]$ 上一致收敛. 由于 $a_n\cos nx\in C(-\infty,+\infty)\ (n=1,2,\cdots)$, 因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx\in C[\delta_0,2\pi-\delta_0].$$

由 δ_0 的任意性, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx\in C(0,2\pi)$.

利用

$$\left|\sum_{k=1}^{k}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}}$$

同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx\in C(0,2\pi)$.

值得指出的是, 定理 10.4.1 及定理 10.4.1′ 都是给出了极限函数连续的充分条件. 容易举出例子来说明这些条件不是必要的, 例如 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$点点收敛到连续函数 0, 但它在 $[0,1]$ 上不一致收敛; 又如函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x^2)x^n=1+x, x\in(-1,1)$, 其和函数在 $(-1,1)$ 内连续, 但该函数项级数在 $(-1,1)$ 内不一致收敛.

下面的狄尼定理告诉我们, 如果附加一定的条件, 我们可以从点收敛推出一致收敛性.

定理 10.4.2 (狄尼(Dini) 定理)　设函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且对于 $\forall x\in[a,b]$ 及 $\forall n\in\mathbb{N}$ 成立 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$, 再设对于 $\forall x\in[a,b]$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$(即 $\{f_n(x)\}$是点点收敛的单调

函数序列), 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续的充分必要条件是

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,(x \in [a,b]).$$

证明 充分性是显然的, 现证必要性. 我们用反证法, 倘若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 $f(x)$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对于 $\forall N \in \mathbb{N}$, 总存在 $n' > N$ 及 $x' \in [a,b]$, 使得

$$|f_{n'}(x') - f(x')| \geqslant \varepsilon_0.$$

因此存在趋于无穷的正整数序列 $\{n_k\}$ 及序列 $\{x_{n_k}\} \subset [a,b]$, 使得

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0.$$

我们不妨设$x_{n_k} \to x_0 \in [a,b](k \to \infty)$. 由 $f_n(x_0) \to f(x_0)\,(n \to \infty)$, 对于 $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{4}$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

取 $n_0 = N+1$, 再由 $f_{n_0}(x)$ 及 $f(x)$ 的连续性, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0,\delta) \cap [a,b]$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad 及 \quad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon.$$

现任取一个 $n_k > n_0$, 使得 $|x_{n_k} - x_0| < \delta$, 则有

$$f_{n_0}(x_{n_k}) \leqslant f_{n_k}(x_{n_k}) \leqslant f(x_{n_k}).$$

因此有

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\leqslant |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \leqslant |f_{n_0}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \\ &\leqslant |f_{n_0}(x_{n_k}) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{n_k})| \\ &< 3\varepsilon = \frac{3}{4}\varepsilon_0.\end{aligned}$$

此矛盾便证明了必要性. 证毕.

由函数序列的狄尼定理, 我们容易推出下述关于函数项级数的狄尼定理.

定理 10.4.2′ (狄尼定理) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛, 并且对于 $\forall n\in\mathbb{N}, u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且非负, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上连续的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

注 在狄尼定理中, 闭区间不能改为开区间或无穷区间, 请读者自己举例说明之.

例 10.4.2 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n\dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\dfrac{1}{x}\right|}$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛.

证明 对于 $n=1,2,\cdots$, 令

$$u_n(x)=x^n\frac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\dfrac{1}{x}\right|}\quad(x\in(0,1)).$$

我们有 $\lim\limits_{x\to0+0}u_n(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to1-0}u_n(x)=0$. 记

$$\widetilde{u}_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\\ -u_n(x), & x\in(0,1),\end{cases}$$

则 $\widetilde{u}_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续、非负, 且

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{u}_k(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\\ -\dfrac{x-x^{n+1}}{1-x}\dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\dfrac{1}{x}\right|}, & x\in(0,1).\end{cases}$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\widetilde{u}_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\\ -\dfrac{x}{1-x}\dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\dfrac{1}{x}\right|}, & x\in(0,1).\end{cases}$$

容易看出它在 $[0,1]$ 上连续. 由定理 10.4.2′ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\widetilde{u}_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n\dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\dfrac{1}{x}\right|}$ 在 (0, 1) 内一致收敛.

读者可以验证, 例 10.4.2 中的函数项级数不能用魏尔斯特拉斯 M 判别法来证明它是一致收敛的.

10.4.2 极限函数的积分

对于 $[a,b]$ 上可积函数序列 $\{f_n(x)\}$, 设它在 $[a,b]$ 上一致收敛到其极限函数 $f(x)$, 我们来研究 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性. 我们有以下的定理.

定理 10.4.3 设函数 $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in[a,b])$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in[a,b])$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 对于 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{10.4.1}$$

特别地, 取 $n_0=N+1$, 则 $f_{n_0}(x)$ 满足 (10.4.1) 式. 由 $f_{n_0}(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 从而存在 $[a,b]$ 的分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

若记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f_{n_0})\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中我们用 $\omega_i(g)$ 表示函数 $g(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅.

对 $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, 由 (10.4.1), 我们有

$$\begin{aligned}&|f(x')-f(x'')|\\&\quad\leqslant |f(x')-f_{n_0}(x')|+|f_{n_0}(x')-f_{n_0}(x'')|+|f_{n_0}(x'')-f(x'')|.\end{aligned}$$

由上式我们推出

$$\omega_i(f)\leqslant \omega_i(f_{n_0})+\frac{2\varepsilon}{3(b-a)}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f_{n_0})\Delta x_i+\frac{2\varepsilon(b-a)}{3(b-a)}\\&\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 再由 (10.4.1), 当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证毕.

同理可证下面的定理.

定理 10.4.3′ 设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上可积, 并且成立

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x. \tag{10.4.2}$$

为了方便起见, 当 (10.4.2) 成立时, 我们也称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 可在 $[a,b]$ 上逐项积分.

例 10.4.3 证明: 当 $x \in (-1,1)$ 时, 成立以下等式:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

证明 设 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, 则当 $|x|<1$ 时, $f(x)$ 是以下几何级数的和函数:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$$

由于其部分和序列

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛到 $\dfrac{1}{1-x^2}$, 因此对固定的 $x \in (-1,1)$, 该函数项级数可在 $[0,x]\,(x>0)$ 或 $[x,0]\,(x<0)$ 上逐项积分. 因此有

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

例 10.4.4 求 $I = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}\mathrm{d}x$ 的值.

解 对于 $\forall x \in [0,1]$ 及 $n=1,2,\cdots$, 有

$$0 \leqslant \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n(n+x)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 由定理 10.4.3′, 我们可以对该函数项级数逐项积分

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x}{n(n+x)}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+n)+\ln n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(1+n)\right]\\
&= c(\text{欧拉常数}).
\end{aligned}
$$

10.4.3 极限函数的导数

在本小节中, 我们研究函数序列 (函数项级数) 逐项求导组成的函数序列 (函数项级数) 的敛散性问题. 在这里我们注意到以下的一个事实: 即使一个函数序列 $\{f_n(x)\}$ 中每个函数在区间 I 内都有连续的导函数 $f_n'(x)$, 且 $\{f_n'(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛, 也不能保证 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛, 甚至不能保证 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上的点收敛性. 这是因为一个函数的原函数可相差一个常数的缘故. 要使得相应的 $\{f_n(x)\}$ 收敛, 则必须要求 $\{f_n(x)\}$ 至少在 I 上的一个点上是收敛的. 我们有以下定理.

定理 10.4.4 设函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且满足

(a) 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$ 存在;

(b) $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)\,(x\in[a,b])$,

则我们有以下结论:

(1) 存在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 使得 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,(x\in[a,b])$;

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微 (端点单侧可微), 并且 $f'(x)=g(x)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'.$$

证明 我们主要利用柯西准则来证明上述结论. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$存在和 $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)\,(x\in[a,b])$ 知, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>m\geqslant N$ 时, 有

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2};\tag{10.4.3}$$

并且对 $\forall x \in [a,b]$, 有

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{10.4.4}$$

对任意 $n > m \geqslant N$, 对 $f_n(x) - f_m(x)$ 在 x_0 与 x 之间应用拉格朗日微分中值定理知: 在 x_0 与 x 之间存在 ξ, 使得

$$\begin{aligned}
&|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| \\
&= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x - x_0| \\
&< \frac{|x - x_0|\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{10.4.5}$$

因此对于 $\forall x \in [a,b]$, 由 (10.4.3) 和 (10.4.5) 得

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) - f_m(x)| \\
&\leqslant |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

由柯西准则知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 从而存在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 使得 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)(x \in [a,b])$, 即 (1) 得证.

为了证明 (2), 对于 $\forall x^* \in [a,b]$, 对 $n = 1, 2, \cdots$, 令

$$h_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x^*)}{x - x^*} \ (x \neq x^*), \quad h_n(x^*) = f_n'(x^*),$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \quad (x \neq x^*),$$

则 $h_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 现在我们证明 $\{h_n(x)\}$ 在 $[a,b] \setminus \{x^*\}$ 上一致收敛到 $h(x)$.

事实上, 从 (10.4.5) 的证明过程中可以推出, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > m \geqslant N$ 时, 对于 $\forall x \in [a,b] \setminus \{x^*\}$, 有

$$\begin{aligned}
|h_n(x) - h_m(x)| &\leqslant \frac{1}{|x - x^*|}|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x^*) - f_m(x^*)]| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.
\end{aligned}$$

因此 $h_n(x)$ 在 $[a,b]\setminus\{x^*\}$ 上一致收敛到 $h(x)$. 注意到 $\lim\limits_{x\to x^*}h_n(x)=f_n'(x^*)$, 由定理 10.4.1 后的注, 我们有 $f'(x^*)=\lim\limits_{x\to x^*}h(x)$ 存在, 并且 $f'(x^*)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x^*)$. 由 $x^*\in[a,b]$ 的任意性, 因此 (2) 成立. 证毕.

对于函数项级数, 我们有

定理 10.4.4′　设函数 $u_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且满足:

(a) 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,

则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的和函数在 $[a,b]$ 上可导, 并且

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x). \tag{10.4.6}$$

同样为了便于叙述, 当 (10.4.6) 成立时, 我们称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 可在 $[a,b]$ 上逐项求导数 (或逐项可微).

注　由于函数可微也是一种局部性质, 因此要讨论函数序列的极限函数的可微性只需要求该函数序列点点收敛, 其导函数序列内闭一致收敛即可. 显然, 对于函数项级数也有类似的结论.

例 10.4.5　证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上无穷次可微.

证明　任取 $\delta_0>0$, 我们已经知道 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1+\delta_0,+\infty)$ 上一致

收敛. 由于

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = \frac{-\ln n}{n^x} \in C(0,+\infty),$$

并且对于 $\forall x \in (1+\delta_0,+\infty)$, 有

$$\left|\frac{-\ln n}{n^x}\right| < \frac{\ln n}{n^{1+\delta_0}},$$

注意到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\delta_0}}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$ 在 $(1+\delta_0,+\infty)$ 上一致收敛.

由定理 10.4.4′ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 的和函数在 $(1+\delta_0,+\infty)$ 上有连续的导函数, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln n}{n^x}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$ 逐项求导后得到的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^2 n}{n^x}$ 仍然在 $(1+\delta_0,+\infty)$ 上一致收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 的和函数在 $(1+\delta_0,+\infty)$上有连续的二阶导数. 依次下去知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 的和函数在 $(1+\delta_0,+\infty)$上具有任意阶导数. 再由 δ_0 的任意性, 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 的和函数在 $(1,+\infty)$ 上无穷次可微.

利用函数项级数, 我们可以构造许多具有特殊性质的函数.

例 10.4.6 设 $\{x_n\} \subset [0,1]$ 是一个各项互不相同的序列, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 的和函数当且仅当 $x=x_n\,(n=1,2,\cdots)$ 时不连续.

证明 首先注意到, 对任意的 n 及 $x\in[0,1]$, 有

$$\left|\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 对于 $\forall k\in\mathbb{N}$, 该函数项级数中仅有一项 $\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}$ 在 $x=x_k$ 处不连续, 而其他项均在 $x=x_k$ 处连续. 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 的和函数在 $x=x_k$ 处不连续.

当 $x_0\notin\{x_n\}$ 时, 由于该函数项级数每一项都在 $x=x_0$ 处连续, 从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 的和函数在 $x=x_0$ 处连续. 证毕.

注 若在上例中, 将符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 换为

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

作

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x-x_n)}{2^n},$$

则可证明 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 但 $g'(x)$ 在 $x=x_n\subset[0,1]\,(n=1,2,\cdots)$ 处不连续, 而在 $[0,1]$ 中的其他点连续.

历史上有许多人曾经认为一个连续函数仅有可能在一列点上是不可导的. 魏尔斯特拉斯利用函数项级数首先构造出了一个处处不可导的连续函数. 后来, 人们借助函数项级数构造了一些更为简单的处处不可导的连续函数的例子, 如 V. D. Waerden 构造了以下例子.

记函数 $\widetilde{f}(x)=|x|$, $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, 然后记将 $\widetilde{f}(x)$ 以 1 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数为 $f(x)$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(4^nx)}{4^n}$ 的和函数是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个连续函数, 但它在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可导.

由于这个事实的证明较为复杂, 我们在这里省略之.

习　题　十

1. 求出下列函数项级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

2. 求下列函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数, 并讨论在给定的区间上是否一致收敛:

(1) $f_n(x)=x(1-x)^n,\ x\in[0,1]$.

(2) $f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-nx^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $f_n(x)=n^2\mathrm{e}^{-nx^2},\ x\in[a,+\infty)$, 这里 $a>0$.

(4) $f_n(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2},\ x\in[0,1]$.

(5) $f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n,\ x\in[0,1]$.

(6) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n^n}$: (a) $x\in[a,b]$; (b) $x\in(-\infty,+\infty)$.

(7) $f_n(x)=\dfrac{\sin n^n x}{n^\alpha},\ \alpha>0,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

(8) $f_n(x)=(\sin x)^{n^\alpha},\ \alpha>0,\ x\in[0,\pi]$.

3. 讨论下列函数序列或函数项级数在指定区间的一致收敛性.

(1) $\left\{f_n(x)=x^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\right\},\ x\in(0,1)$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x^2}},\ x\in[0,+\infty)$;

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $\{f_n(x)=n^{\alpha}x(1-x)^n\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in[0,1]$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$, $\alpha>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

4. 设函数 $f(x)=ax+b$, 其中 a,b 是实数, 且 $0<a<1$. 记 $f_2(x)=f(f(x))$, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))\,(n=3,4,\cdots)$. 证明:

(1) $\{f_n(x)\}$ 在任意闭区间上一致收敛;

(2) $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

5. 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|<+\infty$, $\{b_n\}$ 是有界序列, 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin a_nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛.

6. 设连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛, 证明 $\{\mathrm{e}^{f_n(x)}\}$ 在 $[0,1]$ 上也一致收敛.

7. 设连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到连续函数 $f(x)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点. 证明: 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也没有零点.

8. 设函数序列 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ 在区间 I 上同时成立 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 和 $g_n(x)\rightrightarrows g(x)$, 并且 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 均是一致有界的. 证明在区间 I 上 $f_n(x)g_n(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$.

在区间 $(0,+\infty)$ 上考虑例子 $f_n(x)=x\,(n=1,2,\cdots)$, $g_n(x)=\dfrac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 证明 $f_n(x)\rightrightarrows x$, $g_n(x)\rightrightarrows 0$, 但 $f_n(x)g_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛到 0.

9. 举例说明在狄尼定理 (定理 10.4.2) 中如果将有界闭区间换成开区间或无穷区间, 则结论不一定成立.

10. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数序列, 并且满足 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$, 序列 $\{x_n\}\subset[0,1]$ 满足 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.

(1) 试举例说明: 当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$ 未必收敛

到 $f(x_0)$;

(2) 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [0,1]$, 证明必有 $f_n(x_n) \to f(x_0)\,(n \to \infty)$.

11. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}\ (x_0 \in \mathbb{R})$ 收敛, 证明:

$$\lim_{x \to x_0+0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}.$$

12. 证明: 函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内局部一致收敛的充分必要条件是它在 (a,b) 内闭一致收敛.

13. 证明下列函数在指定区间上连续:

(1) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathrm{e}^{-nx},\ x \in (0,+\infty)$;

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}},\ x \in (-\infty,+\infty)$;

(3) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

14. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \to 3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{x-4}{x-2}\right)^n$;　　(2) $\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{x}\right)^n$.

15. 证明下列函数是 C^∞ 的:

(1) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \mathrm{e}^{-nx},\ x \in (0,+\infty)$, 这里 α 是一实数;

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx \mathrm{e}^{-nx},\ x \in (0,+\infty)$.

16. 证明函数序列 $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 并求极限

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

17. 设函数 $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在任意的闭区间 $[a,b]$ 上可积, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛到 $f(x)$; 再设存在函数 $g(x)$ 满足:

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\quad (n=1,2,\cdots;x\in(-\infty,+\infty)),$$

且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x<+\infty$. 证明: 无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

18. 设函数 $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

19. 对区间 $[0,1]$ 上的函数序列 $f_n(x)=n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx}\,(n=1,2,\cdots)$, 确定参数 α 的范围, 使得

(1) $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$.

20. 设函数 $u_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调, 并且级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(a)$ 与 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(b)$ 绝对收敛. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛.

21. (1) 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 且 $f'(x)$ 在 I 上一致连续. 证明 $F_n(x)=n\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]\,(n=1,2,\cdots)$ 在 I 上一致收敛.

(2) 证明 $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\,(n=1,2,\cdots)$在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

22. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

23. 设在 $[-1,1]$ 上定义的非负连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 满足:

(1) 对 $\forall n$, $\int_{-1}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$;

(2) 对任意的 $\delta > 0$, $f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [-1,-\delta] \cup [\delta,1]$.

再设 $g(x) \in R[-1,1]$ 且在 $x=0$ 处连续. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = g(0).$$

24. 对于函数序列 $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明在 $(-\infty,+\infty)$ 上有:

(1) $\{f_n(x)\}$ 一致收敛到 0;

(2) $\{f_n'(x)\}$ 点点收敛到 0, 但不是一致收敛.

25. 试举一个函数序列 $\{f_n(x)\}$, 使得它满足以下性质:

(1) $\{f_n'(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛;

(2) $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛;

(3) $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

26. 设 $[0,1]$ 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 点收敛到 $f(x)$, 试证明 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)(x \in [0,1])$ 的充分必要条件是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上是**等度连续**的, 即对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x', x'' \in [0,1]$ 且 $|x'-x''| < \delta$ 时, 对于 $\forall n \geqslant 1$, 有 $|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$.

27. 设函数 $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导函数, 并且 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界. 证明: 如果 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上点点收敛到 $f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上必定一致收敛到 $f(x)$.

第十一章　幂　级　数

形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$(其中 $x_0, a_n \in \mathbb{R}$)的函数项级数称为**幂级数**. 对任意的正整数 n, 这类级数的前 n 项部分和 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$是一个至多为 n 次的多项式. 因此从某种意义上说, 幂级数是一种最简单的函数项级数. 在函数项级数中, 无论在理论上还是实际应用中, 幂级数都是最重要的函数项级数之一. 在许多后续课程学习过程中, 我们还将常常遇到幂级数. 一个函数 $f(x)$ 若能展开成幂级数, 该函数也称为实解析的. 我们将会看到实解析函数比 C^∞ 函数 (无穷次可微的函数) 具有更好的性质. 在本章中, 我们将系统介绍幂级数的理论.

§11.1　幂级数的收敛半径与收敛域

11.1.1　幂级数的收敛半径与收敛域

对幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots, \tag{11.1.1}$$

作变量替换 $t = x - x_0$, 则该幂级数可化为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots,$$

因此我们不妨在 (11.1.1) 中假定 $x_0 = 0$. 所以我们将主要讨论形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{11.1.2}$$

的幂级数. 显然当 $x=0$ 时, (11.1.2) 是收敛的.

例 11.1.1 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ 的收敛域.

解 当 $x=0$ 时, 由于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^n x^n = 0^0 = 1$, 因此该幂级数是收敛的. 当 $x \neq 0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} |n^n x^n| = +\infty$, 从而 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ 发散. 因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ 的收敛域为 $\{0\}$.

例 11.1.2 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ 的收敛域.

解 由几何级数的性质知, 当 $|x|<1$ 时, 该幂级数是收敛的. 当 $|x| \geqslant 1$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n \neq 0$, 推知该幂级数发散. 因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

例 11.1.3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.

解 当 $|x|<1$ 时, 由

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqslant |x^n|,$$

知该幂级数收敛. 当 $x=-1$ 时, 它是一个交错级数, 并且通项趋于零, 由此可知此时该幂级数是收敛的. 当 $x=1$ 时, 它是调和级数, 因此该幂级数发散. 当 $|x|>1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n} = \infty$, 从而该幂级数发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

例 11.1.4 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛域.

解 如同上题, 易知当 $|x|<1$ 时, 该幂级数收敛; 当 $|x|>1$ 时,

该幂级数发散; 而当 $x=\pm 1$ 时, 显然该幂级数收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

例 11.1.5 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛域.

解 对于 $\forall x\neq 0$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{|x|^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0.$$

由此推知, 该幂级数在 x 处收敛. 由于 x 是 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

以上例子说明了幂级数具有各种不同的收敛域, 是否所有幂级数的收敛域一定具有上面列举的收敛域的形式之一呢? 为了证实这一点, 我们先来证明以下关于幂级数收敛域的一个基本结果.

定理 11.1.1 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\neq 0$ 处收敛, 则该级数在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 内闭绝对一致收敛.

证明 任取闭区间 $[a,b]\subset(-|x_0|,|x_0|)$, 则存在常数 $0<\delta_0<1$(依赖 $[a,b]$), 使得

$$[a,b]\subset[-\delta_0|x_0|,\delta_0|x_0|]\subset(-|x_0|,|x_0|).$$

下面我们证明 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $[-\delta_0|x_0|,\delta_0|x_0|]$ 上绝对一致收敛.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx_0^n$ 收敛, 我们有 $|a_nx_0^n|\to 0\ (n\to\infty)$, 因此存在 $M>0$, 使得对于 $\forall n\geqslant 0$, 有

$$|a_nx_0^n|\leqslant M.$$

所以对于 $\forall x\in[-\delta_0|x_0|,\delta_0|x_0|]$, 有

$$|a_nx^n| = \left|a_nx_0^n\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M\delta_0^n.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}M\delta_0^n$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_nx^n|$ 在 $[-\delta_0|x_0|, \delta_0|x_0|]$ 上一致收敛. 证毕.

由定理 11.1.1 可知, 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在点 $x_0 \neq 0$ 处收敛而在点 $x_1 \neq 0$ 处发散时, 则必存在开区间 $(-R, R)$, $|x_0| \leqslant R \leqslant |x_1|$, 使得它在 $(-R, R)$ 内收敛, 而在 $[-R, R]$ 外面发散. 事实上, 令

$$R = \sup\left\{|x| : \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\text{收敛}\right\},$$

则由定理 11.1.1 有 $R \geqslant |x_0|$, 但 $R \leqslant |x_1|$. 这是因为倘若 $R > |x_1|$, 则存在 $|x_2| > |x_1|$, 使得 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx_2^n$ 收敛. 由定理 11.1.1 知 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx_1^n$ 也必收敛, 这与假设矛盾.

容易看出 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $(-R, R)$ 内闭绝对一致收敛, 而在 $(-\infty, R)$ 和 $(R, +\infty)$ 上发散, 因此我们称 R 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径**. 从上面讨论可知, 此时 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛域必包含 $(-R, R)$. 该幂级数在 $x = \pm R$ 是否收敛, 则没有一般性的结论, 需对每个幂级数分别进行讨论. 从前面的例子可知各种情形均可发生, 读者应当注意到这一点. 另外, 当 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 仅在 $x = 0$ 处收敛时, 规定它的收敛半径为 0. 而当 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 处处收敛时, 则自然规定它的收敛半径为 $+\infty$, 这时它的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

11.1.2　收敛半径的求法

在某种意义下, 幂级数可以看成是几何级数的一种推广. 因此有关几何级数的一些敛散性判别法则对幂级数也是适用的.

定理 11.1.2 (柯西 – 哈达玛定理)　设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 记

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

(1) 当 $\rho = +\infty$ 时, $R = 0$;

(2) 当 $\rho = 0$ 时, $R = +\infty$;

(3) 当 $0 < \rho < +\infty$ 时, $R = \dfrac{1}{\rho}$.

证明　在定理的条件下, 对于固定的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|$. 因此由数项级数的柯西判别法知, 当 $\rho|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛; 而当 $\rho|x| > 1$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 发散. 所以我们有

(1) 当 $\rho = +\infty$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 仅当 $x = 0$ 时收敛, 因此 $R = 0$;

(2) 当 $\rho = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 收敛, 因此 $R = +\infty$;

(3) 当 $0 < \rho < +\infty$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ 时收敛, 而在 $|x| > \dfrac{1}{\rho}$ 时发散, 因此 $R = \dfrac{1}{\rho}$. 证毕.

有时候, 用以下定理计算收敛半径要方便些.

定理 11.1.3　设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho,$$

则

(1) 当 $\rho=+\infty$ 时, $R=0$;

(2) 当 $\rho=0$ 时, $R=+\infty$;

(3) 当 $0<\rho<+\infty$ 时, $R=\dfrac{1}{\rho}$.

证明 由于

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

因此在定理的条件下, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$. 所以, 由定理 11.1.2 即可推出定理 11.1.3. 证毕.

注 1 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$, 则它的收敛半径仍然为

$$R=\begin{cases}0, & \rho=+\infty,\\ +\infty, & \rho=0,\\ R=\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty.\end{cases}$$

值得指出的是, 此时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛域则是以 x_0 为中心且包含 (x_0-R,x_0+R) 的区间 (端点的情况视不同的幂级数而定).

例 11.1.6 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n!x^{n^n}$ 的收敛半径与收敛域.

解 该幂级数有许多项的系数为 0, 这样的幂级数我们称之为缺项幂级数. 由

$$1<(n!)^{\frac{1}{n^n}}<(n^n)^{\frac{1}{n^n}}$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^n)^{\frac{1}{n^n}}=1$, 得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n^n]{n!}=\varlimsup_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^n}}=1.$$

因此该幂级数的收敛半径 $R=1$. 显然在 $x=\pm1$ 时, 该幂级数是发散的, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!x^{n^n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

例 11.1.7 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^2}(x-3)^n$ 的收敛半径和收敛域.

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n+2)}{(n+1)^2}\Big/\frac{\ln(n+1)}{n^2}\right]=1,$$

知该幂级数的收敛半径为 1.

在端点处, 即 $x=2$ 或 $x=4$ 时, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 成立以下不等式

$$\left|\frac{\ln(n+1)(x-3)^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{\ln(n+1)}{n^2}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

因此该幂级数在两个端点处绝对收敛. 由此可知它的收敛域为 $[2,4]$.

例 11.1.8 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n^\alpha}}$(其中 $\alpha>0$) 的收敛半径和收敛域.

解 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^\alpha}}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2^{n^{\alpha-1}}}=\begin{cases}1, & 0<\alpha<1,\\ \frac{1}{2}, & \alpha=1,\\ 0, & \alpha>1,\end{cases}$$

我们分别有以下各种情况:

(1) 当 $0<\alpha<1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n^\alpha}}$ 的收敛半径为 1. 当 $x=-2$ 或 $x=0$ 时, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时,

$$n^\alpha>\frac{2}{\ln 2}\ln n,$$

从而有

$$\left|\frac{(x+1)^n}{2^{n^\alpha}}\right| = \frac{1}{2^{n^\alpha}} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{2}{\ln 2}\ln n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{\ln 2}\ln 2}} = \frac{1}{n^2}.$$

因此该级数在两个端点处绝对收敛, 此时它的收敛域为 $[-2,0]$.

(2) 当 $\alpha = 1$ 时, 该幂级数的收敛半径 $R = 2$. 当 $x = -3, 1$ 时, 我们有

$$\left|\frac{(x+1)^n}{2^n}\right| \equiv 1 \nrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

因此该级数在两个端点处都不收敛, 此时它的收敛域为 $(-3,1)$.

(3) 当 $\alpha > 1$ 时, 该幂级数的收敛半径 $R = +\infty$, 此时收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

§11.2 幂级数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则该幂级数的收敛域是一个区间. 人们自然要问: 该幂级数的和函数在收敛域内具有什么样的性质? 由于幂级数的每一项都具有很好的性质, 为了回答这个问题, 我们只要研究幂级数在其收敛域的一致收敛性即可.

以下是这方面的主要结果.

定理 11.2.1 (阿贝尔定理) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内闭一致收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R]$ 的任何闭子区间一致收敛;

(3) 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n R^n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[-R, R)$ 的任何闭子区间一致收敛.

证明 我们容易看出 (1) 可由上节中的定理 11.1.1 直接推出, 因此请读者自证. 由于 (2) 和 (3) 的证明类似, 我们只证 (3), (2) 的证明也留给读者.

首先我们注意到由 (1) 可知, 要证明 (3) 只要证该幂级数在 $[-R,0]$ 上一致收敛即可. 在

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n\left(\frac{x}{-R}\right)^n$$

中设 $u_n(x) = a_n(-R)^n, v_n(x) = \left(\frac{x}{-R}\right)^n (n = 0,1,2,\cdots)$. 由于函数序列 $\{u_n(x)\}$ 与 x 无关且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 收敛, 因此它关于 $x \in [-R,0]$ 是一致收敛. 而 $v_n(x)$ 关于固定的 $x \in [-R,0]$ 是 n 的单调下降函数, 且对所有 $x \in [-R,0]$ 及所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|v_n(x)| \leqslant 1$. 因此由函数项级数的阿贝尔判别法知在 $[-R,0]$ 上一致收敛. 证毕.

人们习惯上将定理 11.2.1 中的结论 (1) 称为**阿贝尔第一定理**, 而将结论 (2), (3) 称为**阿贝尔第二定理**.

由定理 11.2.1, 我们推出

推论 1 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$的收敛半径为 $R(0 < R < +\infty)$, 则

(1) 当该幂级数在 $x = x_0 + R$ 收敛时, 有

$$\lim_{x \to x_0+R-0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n;$$

(2) 当该幂级数在 $x = x_0 - R$ 收敛时, 有

$$\lim_{x \to x_0-R+0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n.$$

特别地, 我们有

推论 2 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R>0$, 则和函数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在其收敛域上连续.

下面我们讨论幂级数在其收敛域上逐项积分的问题. 由定理 11.2.1 及其推论, 我们有以下结论.

定理 11.2.2 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径为 $R>0$(R 可为 $+\infty$), 则对于其收敛域内任意两点的 t_1,t_2, 有

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_{t_1}^{t_2}(x-x_0)^n\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}[(t_2-x_0)^{n+1}-(t_1-x_0)^{n+1}].\end{aligned}$$

注 在定理 11.2.2 中, 取 $t_1=x_0,t_2=x$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 逐项积分得到幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$. 容易看出这两个幂级数具有相同的收敛半径 $R>0$. 但在 (x_0-R,x_0+R) 端点处这两个级数可能具有不同的敛散性. 一般来说, 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在端点处收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ 在端点处也收敛. 反之一般不真. 例如幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$, 其逐项积分后得到的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 再对它逐项积分后得到的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 的收敛域则为 $[-1,1]$.

下面我们来讨论幂级数的和函数的可微性问题.

定理 11.2.3　设幂级数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 $R>0$(R 可为 $+\infty$), 则对于 $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$, $f(x)$ 在 x 处具有任意阶导数, 并且对 $k=1,2,\cdots$, 有

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

证明　设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$, 则对固定的正整数 k, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-k+1)|a_n|}=\rho.$$

这说明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 逐项 k 次求导后得到幂级数与原幂级数具有相同的收敛半径, 因此它们在 (x_0-R,x_0+R) 均内闭一致收敛. 分别对 $k=1,2,\cdots$ 应用函数项级数逐项求导定理即可证明所要结论. 证毕.

对于一个幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, 逐项求导后的幂级数与原级数具有相同的收敛半径 R. 但在 (x_0-R,x_0+R) 的端点处, 它们可能具有不同的敛散性. 一般来说, 若逐项求导后的级数在端点处收敛, 则原来的级数在端点处必收敛, 但反之不真.

例 11.2.1　设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q(1+n)}(p>0,q>0)$, 试求:

(1) 该幂级数的收敛域;

(2) 该幂级数逐项积分后所得幂级数的收敛域;

(3) 该幂级数逐项求导后所得幂级数的收敛域.

解　(1) 由

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p\ln^q(1+n)}}=1,$$

知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q(1+n)}$ 的收敛半径为 1. 当 $x=-1$ 时, 它是一个交错级数, 并且 $\left\{\dfrac{1}{n^p\ln^q(1+n)}\right\}$单调下降趋于零 (可对 $x^{-p}\ln^{-q}x$ 求导验证之), 因此该级数在 $x=-1$ 时收敛. 当 $x=1$ 时, 由数项级数的判别法知, 当 $p>1$ 或者 $p=1$ 且 $q>1$ 时原幂级数收敛, 否则发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q(1+n)}$ 的收敛域为

$$\begin{cases}[-1,1], & p>1 \text{ 或 } p=1 \text{ 且 } q>1,\\ [-1,1), & p<1 \text{ 或 } p=1 \text{ 且 } q\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) 逐项积分后所得幂级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)n^p\ln^q(1+n)},$$

它的收敛半径为 1, 且易看出其收敛域为 $[-1,1]$.

(3) 逐项求导后所得幂级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^{p-1}\ln^q(1+n)},$$

它的收敛半径为 1. 当 $p\geqslant 1$ 时, 在 $x=-1$ 处, 它是一个莱布尼茨交错级数, 因此收敛. 当 $p<1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}\ln^q(1+n)}=+\infty$, 因此该级数在 $x=-1$ 处发散. 当 $x=1$ 时, 由数项级数的判别法知, 当 $p>2$, 或者 $p=2$ 且 $q>1$ 时, 它是收敛的, 否则发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^{p-1}\ln^q(1+n)}$ 的收敛域为

$$\begin{cases}[-1,1], & p>2 \text{ 或 } p=2 \text{ 且 } q>1,\\ [-1,1), & 1\leqslant p<2 \text{ 或 } p=2 \text{ 且 } q\leqslant 1,\\ (-1,1), & p<1.\end{cases}$$

例 11.2.2　求数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$ 的和.

解　设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$, 则我们要求的值为 $f(1)$. 由

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n}$$

及

$$f''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n-1}=2x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}=\frac{2x}{1-x^2},\quad x\in(-1,1),$$

我们可求出

$$f'(x)-f'(0)=\int_0^x f''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\ln(1-x^2).$$

注意到 $f'(0)=0$, 我们有

$$\begin{aligned}f(x)-f(0)&=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x\ln(1-t^2)\mathrm{d}t\\&=-t\ln(1-t^2)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{2t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t\\&=-x\ln(1-x^2)+\int_0^x 2\mathrm{d}t-\int_0^x\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t\\&=-x\ln(1-x^2)+2x+\ln\frac{1-x}{1+x}\\&=(1-x)\ln(1-x)+2x-(1+x)\ln(1+x).\end{aligned}$$

注意到 $f(0)=0$, 并且 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$, 因此 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续. 由此推出

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to1-0}f(x)=2-2\ln2.$$

§11.3 初等函数的幂级数展开

11.3.1 泰勒级数

设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)(\delta>0)$ 内成立 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可展成幂级数**. 一个函数 $f(x)$ 若能在某个区间 I 上展开成幂级数, 我们则称 $f(x)$ 在 I 上是**实解析**的. 由上节的定理知道, 此时 $f(x)$ 在 I 内必具有任意阶导数. 那么什么样的函数能展开成幂级数呢? 这个问题可以在复变函数课程中得到完满的解决. 在数学分析课程中, 我们则主要是通过考查函数的泰勒公式的余项的敛散性来研究这一问题.

首先我们来考查以下问题: 若一个函数 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ $(R>0)$ 中能展开成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, 该幂级数的系数与 $f(x)$ 具有什么样的联系呢?

为此设 $f(x)$ 在 $x\in(-R,R)(R>0)$ 时成立等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \tag{11.3.1}$$

则首先我们有

$$f(0)=a_0.$$

对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 在 (11.3.1) 两边求 n 阶导数后令 $x=0$, 我们有

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

上述讨论告诉我们, 若 $f(x)$ 是 $(-R,R)$ 中一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数, 则成立如下等式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

定义 11.3.1　设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有任意阶导数, 则称幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**; 当 $x_0=0$ 时, 该级数也称为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**. 如果在 x_0 的某个邻域内成立 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在该邻域内的**泰勒展式**. 特别地, 当 $x_0=0$ 时, 该泰勒展式也称为 $f(x)$ 的**麦克劳林展式**.

由上面的讨论, 我们有以下结论.

定理 11.3.1　若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) $(R>0)$ 成立, 则必有 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$　$(n=0,1,\cdots)$, 即 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ 必是 $f(x)$ 的泰勒展式 (即 $f(x)$ 的幂级数展式是唯一的).

下面的例子说明 C^∞ 的函数未必是实解析的.

例 11.3.1　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明: $f(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$, 但在 $x=0$ 的邻域内不是实解析的 (即它不能展成幂级数).

证明　在第一册中, 我们用洛必达法则证明了 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有任意阶导数, 并且对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $f^{(n)}(0)=0$. 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不能展成幂级数. 否则的话, 在 $x=0$ 的某个邻域内有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0.$$

这显然是不成立的. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内不是实解析的.

11.3.2 初等函数的泰勒展式

在本节中我们主要讨论如何来求初等函数的泰勒展式. 设函数 $f(x) \in C^{\infty}(-\delta_0, \delta_0)$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们可以求得 $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. 因此 $f(x)$ 在 $(-\delta_0, \delta_0)$ 内有泰勒展式的充分必要条件是: 对于 $\forall x \in (-\delta_0, \delta_0)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] = 0.$$

换句话说, $f(x)$ 在 $(-\delta_0, \delta_0)$ 内有泰勒展式的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项趋于零.

例 11.3.2 证明:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

证明 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们有 $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$. 因此对于 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 我们有带拉格朗日余项的泰勒公式

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 由

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

及 x 的任意性得

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

例 11.3.3 证明:

(1) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

证明　对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 其泰勒公式中的拉格朗日余项满足

$$\left|\frac{\sin\left[\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中 $0<\theta<1$. 因此我们有

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 其泰勒公式中的拉格朗日余项满足

$$\left|\frac{\cos[\theta x+(n+1)\pi]}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中 $0<\theta<1$. 因此我们有

$$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 11.3.4　设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 证明:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad x\in(-1,1),\end{aligned}\tag{11.3.2}$$

其中我们规定 $\binom{\alpha}{0}=1$, 并讨论上述幂级数在端点的收敛情况.

证明 当 α 为一正整数时, $(1+x)^\alpha$ 为一多项式, 由二项式定理即知 (11.3.2) 成立. 因此下面假定 α 不是正整数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\begin{pmatrix}\alpha\\ n+1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1,$$

因此 (11.3.2) 式右边的幂级数的收敛半径为 1, 从而该级数在 $(-1,1)$ 内收敛. 下面证明 (11.3.2) 式成立.

对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有 $[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. 对于 $(1+x)^\alpha$ 的泰勒公式中的积分余项, 我们有

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\alpha\int_0^x(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\left[\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\right]\alpha\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\frac{(x-t)^n}{x^n(1+t)^n}\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \left|\left[\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\right]\alpha\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\left[\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\right][(1+x)^\alpha-1]\right|.\end{aligned}\tag{11.3.3}$$

在 (11.3.3) 的证明中, 我们利用了以下不等式:

$$\left|\frac{x-t}{x(1+t)}\right|\leqslant 1,$$

其中 $|x|<1$, 而 t 在 0 和 x 之间. 事实上, 当 $x>0$ 时, 我们有

$$\left|\frac{x-t}{x(1+t)}\right| = \frac{x-t}{x(1+t)} = \frac{1}{1+t}\left(1-\frac{t}{x}\right)\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1;$$

当 $x<0$ 时, 有

$$\left|\frac{x-t}{x(1+t)}\right| = \left|\frac{1-\left|\dfrac{t}{x}\right|}{1-|t|}\right|\leqslant 1.$$

因此该不等式成立, 从而 (11.3.3) 成立.

由于当 $|x|<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n$ 是收敛的, 因此它的一般项 $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\to 0(n\to\infty)$. 此时从 (11.3.3) 可以看出, 对任意的 $|x|<1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

这就证明了当 $|x|<1$ 时成立

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

为了讨论在端点处 (11.3.2) 式是否成立, 我们分几种情况进行考虑.

(1) 考虑 $\alpha>0$ 的情形.

由于 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=-1$ 处连续, 此时 (11.3.2) 右边的级数为

$$\begin{aligned}1+&\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(-1)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\alpha(-\alpha+1)\cdots[-\alpha+(n-1)]}{n!}\\&\triangleq\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.\end{aligned}$$

由于

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)=\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}\to 1+\alpha\quad(n\to\infty),$$

由拉贝判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ 绝对收敛.

同理当 $x=1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}$ 也绝对收敛. 因此当 $\alpha>0$ 时, (11.3.2)

式在 $[-1,1]$ 上成立.

(2) 考虑 $\alpha \leqslant -1$ 的情形.

此时由于

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| \leqslant 1,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n} \neq 0$, (11.3.2) 式在 $x=1$ 时不成立.

(3) 考虑 $-1<\alpha<0$ 的情形.

此时

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

是一交错级数, 注意到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right| &\geqslant \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{n-\alpha}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!}\right|\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right| \\ =&\left|\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)\right| \\ =&\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

由莱布尼茨判别法知, (11.3.2) 式在 $x=1$ 处成立.

当 $\alpha<0$ 时, 由于 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有定义, 从而此时 (11.3.2) 式在 $x=-1$ 处不成立.

因此, 我们有以下结论:

当 $\alpha \leqslant -1$ 时, (11.3.2) 式在 $(-1,1)$ 内成立;

当 $-1<\alpha<0$ 时, (11.3.2) 式在 $(-1,1]$ 上成立;

当 $\alpha>0$ 时, (11.3.2) 式在 $[-1,1]$ 上成立.

下面我们继续讨论一些初等函数的泰勒展式. 有了前面几个初等函数的泰勒展式, 很多初等函数的泰勒展式都可以借助它们的泰勒展式求得. 正如我们已经指出的, 一个函数的幂级数展式如果存在, 则必唯一. 因此我们可以对已知函数的泰勒展式通过自变量的变换或在其收敛域中进行微分或积分得到新的函数的泰勒展式.

例 11.3.5 证明

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},\quad x\in[-1,1].$$

证明 由 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 在 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 的泰勒展式中令 $t=-x^2$, 得

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n\\&=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots.\end{aligned}$$

对 $x\in(0,1)$, 两边从 0 到 x 积分得

$$\begin{aligned}\arcsin x&=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-t^2)^n\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\binom{-1/2}{n}(-t^2)^n\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}.\end{aligned}$$

当 $x=\pm1$ 时, 由拉贝判别法知上式也成立.

注 在 $\arcsin x$ 的泰勒展式中令 $x=1$, 我们得到

$$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)}.$$

例 11.3.6 证明

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad x \in (-1,1].$$

证明 因为 $\frac{1}{1+x}$ 是一个几何级数的和函数, 我们有

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}, \quad x \in (-1,1).$$

对上述等式两边从 0 到 $x \in (-1,1)$ 积分得

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

由于当 $x=1$ 时, 上式右边的级数为莱布尼茨交错级数, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 处连续, 上述等式在 $x=1$ 时成立. 当 $x=-1$ 时, 该级数为 $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, 从而是发散的. 故

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad x \in (-1,1].$$

例 11.3.7 求 $f(x) = \sin(x^2-2x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展式.

解 由

$$\sin(x^2-2x) = \sin[(x-1)^2-1]$$
$$= \sin(x-1)^2\cos 1 - \sin 1\cos(x-1)^2,$$

利用 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的泰勒展式得

$$\sin(x-1)^2\cos 1 - \sin 1\cos(x-1)^2$$

$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$- \sin 1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{4n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

注 对于像例 11.3.7 中一类函数的泰勒展式, 一般来说不应该直接求 n 阶导数, 而是要应用已知函数的展式来求之.

例 11.3.8 将 $\dfrac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}}(k>1)$ 展成麦克劳林级数.

解 直接计算得

$$\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}} = \frac{1-x}{1-x^k} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{kn} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{kn+1}, \quad x \in (-1,1).$$

设级数 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ 且 $R_1 \leqslant R_2$, 则这两个级数在 $(-R_1, R_1)$ 均内闭绝对一致收敛. 因此 $f(x)g(x)$ 的麦克劳林展式可以通过它们对应的幂级数的乘积得到.

例 11.3.9 求 $\ln^2(1+x)$ 的麦克劳林展式.

解 由于

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1],$$

我们有

$$\ln^2(1+x) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right]^2 = x^2 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}\right]^2$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad x \in (-1,1),$$

其中

$$\begin{aligned}c_n &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}\\&= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)+(n-k+1)}{(k+1)(n-k+1)}\\&= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\Big)\\&= \frac{(-1)^n2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

因此

$$\ln^2(1+x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)x^{n+1},\quad x\in(-1,1).$$

我们可以证明当 $x=1$ 时, 该级数收敛; 而当 $x=-1$ 时, 该级数发散. 因此我们有

$$\ln^2(1+x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)x^{n+1},\quad x\in(-1,1].$$

§11.4 连续函数的多项式逼近

从函数的复杂程度来看, 多项式可以认为是最简单的函数类. 用简单函数去逼近复杂函数无论从理论上还是在实际应用中都是十分重要的. 但如何去逼近一个函数, 则有许多方法. 如果一个函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-R,x_0+R)(R>0)$内能展开成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, 则容易看出对 (x_0-R,x_0+R) 内的闭区间 $[a,b]$ 和任给 $\varepsilon>0$, 必存在多项式 $P(x)$(事实上取级数的前 n 项 (n 充分大) 部分和即可), 使得 $|P(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立.

显然, 由幂级数来逼近一个函数具有很大的限制性: 它要求 $f(x)$ 是实解析的. 因此一个自然的问题是: 对一些性质不那么好的函数 (如连续函数) 是否存在多项式逼近呢?

为了讨论这个问题, 我们先给出以下定义.

定义 11.4.1 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义. 若对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得对一切 $x \in I$, 有 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上**可被多项式逼近**.

显然, $f(x)$ 在 I 上可被多项式逼近的充分必要条件是存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$, 使得 $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in I)$. 因此, 若 $f(x)$ 在 I 上可被多项式逼近, $f(x)$ 在 I 上必定连续.

可以证明, 若 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 内可被多项式逼近, 则 $f(x)$ 必可以连续延拓到 $[a, b]$(见本章习题). 另外, 若 I 是无界区间, 当 $f(x)$ 不是多项式时, $f(x)$ 在 I 上则一定不能被多项式逼近 (见本章习题).

因此, 一个自然的问题是: 任何闭区间上的连续函数 $f(x)$ 是否一定可被多项式逼近呢? 以下魏尔斯特拉斯定理对此问题给了一个圆满的回答.

定理 11.4.1 (魏尔斯特拉斯定理) 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 可被多项式逼近.

为了证明该定理, 我们先证明以下几个引理.

引理 11.4.2 设函数 $f_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, J)$ 在区间 $[a, b]$ 上可被多项式逼近, 并且设 $c_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \cdots, J)$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{J} c_j f_j(x)$ 在 $[a, b]$ 上可被多项式逼近.

引理 11.4.3 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 并且 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in [a, b])$, 再设对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 可被多项式逼近, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可被多项式逼近.

引理 11.4.2 和引理 11.4.3 的证明是简单的, 请读者自证.

引理 11.4.4 设 $c \in \mathbb{R}$, 则存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$, 使得 $\{P_n(x)\}$

在任何有限闭区间上一致收敛到 $|x-c|$.

证明 我们首先证明在 $[-1,1]$ 上, $|x|$ 可被多项式逼近.

在幂级数理论中我们已知: 当 $\alpha>0$ 时, $(1+t)^\alpha$ 可在 $[-1,1]$ 展成幂级数:

$$(1+t)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}t^n,\quad t\in[-1,1].$$

因此该幂级数的部分和序列 $\{S_n(t)\}$ 为关于 t 的多项式序列, 它在 $[-1,1]$ 上一致收敛到 $(1+t)^\alpha$. 所以, 对于 $\alpha=\dfrac{1}{2}$,

$$|x|=[1+(x^2-1)]^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}(x^2-1)^n$$

也在 $|x|\leqslant 1$ 上成立. 由于它的部分和序列 $\{S_n(x^2-1)\}$ 是关于 x 的多项式序列, 根据函数项级数一致收敛的定义, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in[-1,1]$, 有

$$|S_n(x^2-1)-|x||<\varepsilon.$$

这就是说, 在 $[-1,1]$ 上, $|x|$ 可被多项式逼近.

对于 $\forall n\geqslant 1$, 由刚才所证明事实知, 存在多项式 $Q_n(x)$ (不一定是 n 次多项式), 使得对一切 $x\in[-1,1]$, 有

$$|Q_n(x)-|x||<\frac{1}{n^2}.$$

我们设 $P_n(x)=nQ_n\Big(\dfrac{x-c}{n}\Big)$, 且 $[A,B]$ 为任意一个区间, 则当 $n>\max\big\{|A|+|c|,|B|+|c|\big\}$ 时,

$$\big|P_n(x)-|x-c|\big|<\frac{1}{n}$$

对一切 $x\in[A,B]$ 成立. 证毕.

为了证明定理 11.4.1, 我们引进符号 $H(x)=\dfrac{x+|x|}{2}=\max\{x,0\}$, $x\in\mathbb{R}$. 再设 $g(x)\in C[a,b]$, 我们称 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上**分段线性**, 若

存在 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得 $g(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 均为线性函数.

引理 11.4.5 设函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且分段线性, 则 $g(x)$ 可以表示成 $g(x)=g(a)+\sum\limits_{i=1}^{n}c_iH(x-x_{i-1})$ $(x\in[a,b])$, 其中 $c_i\in\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$.

此引理的证明是初等的, 可以对分点作归纳法证之, 请读者自己给出.

定理 11.4.1 的证明 首先注意到我们可以找到 $[a,b]$ 上的一列分段线性函数 $\{g_m(x)\}$, 使得

$$g_m(x)\rightrightarrows f(x),\quad x\in[a,b]$$

(例如用例 7.3.1 的方法).

由引理 11.4.5, 对于分段线性函数 $g_m(x)$, 存在 $[a,b]$ 的分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n_m}=b$, 使得

$$g_m(x)=g_m(a)+\sum_{i=1}^{n_m}c_i^{(m)}H(x-x_{i-1}^{(m)}).$$

由于

$$H(x-x_{i-1}^{(m)})=\frac{x-x_{i-1}^{(m)}+|x-x_{i-1}^{(m)}|}{2},\quad i=1,2,\cdots,n_m.$$

由引理 11.4.4 知, $H(x-x_{i-1}^{m})(i=1,2,\cdots,n_m)$ 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近. 根据引理 11.4.2, $g_m(x)$ 可被多项式逼近. 注意到 $g_m(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 再由引理 11.4.3 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近. 证毕.

习题十一

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{n^{2n}}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^{2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha}x^n\ (\alpha\in\mathbb{R})$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n n^2 x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^n}x^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(x-2)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+2\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)x^n$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n^2}}x^n$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n x^{n^2}$.

2. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛半径是 $r(0<r<+\infty)$, 求下列幂级数的收敛半径 (其中 k 为正整数):

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n^k x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{n^2}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^{kn}$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n^2}$.

3. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别是r_a 和 $r_b(r_a, r_b\in(0,+\infty))$, 给出下列幂级数收敛半径的范围:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n b_n x^n$.

4. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{2n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$;

(8) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(0!=1)$.

5. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$;

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

6. 求下列函数的麦克劳林展式:

(1) $\sin^2 x$;

(2) $\cos(\alpha+\beta x)$;

(3) $\cos^3 x$;

(4) $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$;

(5) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$;

(6) $(1+x)\ln(1+x)$;

(7) $\arctan\frac{2(1-x)}{1+4x}$;

(8) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(9) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(10) $\ln(1+x+x^2+x^3)$;

(11) $(\arctan x)^2$;

(12) $\ln^2(1-x)$.

7. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的麦克劳林展式 (展到 x^6 次项).

8. 求函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$ 的麦克劳林展式.

9. 证明: 当 $a,b>-1$ 时, 成立

$$\int_0^1\frac{x^a-x^b}{1-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}\right).$$

10. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上各阶导数存在并且非负, 证明:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\quad \forall x\in[a,b].$$

11. 设幂级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-a)^n$ 的收敛半径是 r. 对于 $\forall b\in(a-r,a+r)$, 令 $r'=\min\{b-a+r,a+r-b\}$. 证明:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x-b)^n,\quad x\in(b-r',b+r'),$$

这里 $b_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}a_k(b-a)^k(n=0,1,2,\cdots)$.

12. 设正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 发散, 并且幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1. 证明: $\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=+\infty$.

13. 设非常数函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的每一点都可以展成幂级数 (即对于 $\forall x_0\in(a,b)$, $f(x)$ 在 x_0 处可展成幂级数, 并且其幂级数的收敛半径 $r>0$). 证明 $f(x)$ 的零点集在 (a,b) 内没有聚点.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可以展成幂级数, 并且序列 $\{f^{(n)}(0)\}$ 是有界的. 证明 $f(x)$ 必是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个 C^∞ 函数的限制.

15. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足:

$$\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

证明: 在 $[0,1]$ 上, 有 $f(x)\equiv0$.

16. 证明引理 11.4.2, 11.4.3, 11.4.5.

17. 设函数 $f(x)$ 在一个无穷区间上可被多项式逼近, 证明 $f(x)$ 必是一个多项式.

18. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

19. 证明下列恒等式:

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=1$;

(2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k}=0$;

(3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}$.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 对每个正整数 n, 定义

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$

证明 $B_n(f,x)\rightrightarrows f(x)\ (x\in[0,1])$.

第十二章　傅里叶级数

在 18 世纪中叶, 法国数学家傅里叶 (Fourier) 在研究热传导问题时首先引进了三角级数, 后来人们将其称为傅里叶级数. 傅里叶级数理论 (人们后来称与之有关的理论为傅里叶分析) 不仅是数学研究中的一门重要的分支, 而且在物理学、工程等方面都有重要的应用. 在数学分析课程中, 我们主要介绍傅里叶级数的一些最基本性质.

我们可以从下面纯数学的观点来引进傅里叶级数.

在上一章中, 我们已经较系统地学习了幂级数. 现在换一种观点来看幂级数, 我们可以对幂级数的形式作如下的描述.

取定一组函数系, 即

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n,\ \cdots,$$

则任何一个多项式 $P_n(x)$ 可以认为是从该函数系中取有限个元素的线性组合, 而一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 则是该函数系的一个无穷的线性组合.

从这种观点来看, 我们可以取另一组函数系来考虑其线性组合. 要得到系统的理论, 必须要求这个函数系具有很好的性质以及其线性组合也具有很好的性质.

我们所熟悉的函数中, 除了多项式外, $\sin nx$, $\cos nx (n = 1, 2, \cdots)$ 则是遇到比较多的一类初等函数. 而三角函数系的无穷线性组合就是我们前面提到的傅里叶级数. 在本章中, 我们将考虑三角函数系的无穷线性组合 —— 傅里叶级数, 并研究其基本性质.

§12.1 函数的傅里叶级数

12.1.1 基本三角函数系

形如 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的级数称为**傅里叶级数**, 其中 $a_0,a_n,b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为实数. 我们可以将傅里叶级数看成函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots \tag{12.1.1}$$

的一个线性组合, 这个函数系我们以后称之为**基本三角函数系**. 为了以后叙述方便, 我们称基本三角函数系中有限个元素的线性组合为一个三角多项式. 特别地, 称 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=T_n(x)$ 为一个 n 阶三角多项式.

为了讨论傅里叶级数, 首先我们来研究函数系 (12.1.1).

基本三角函数系 (12.1.1) 的第一个特性是它的周期性, 即基本函数系 (12.1.1) 中的函数具有公共的周期 2π.

我们对闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x),g(x)$, 定义它们之间的**内积**为

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x),g(x)$ 满足 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上**正交**.

基本三角函数系 (12.1.1) 的第二个特性是它的正交性, 即基本函数系 (12.1.1) 中任意两个不同的函数在长度为 2π 的任意区间上正交. 由于该函数系的周期性, 上述断言等价于下述等式成立:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n,\ 并且\ n,m\in\mathbb{N})$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n \text{ 并且 } n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(m\in\mathbb{N}\cup\{0\},n\in\mathbb{N})$.

事实上, 对于 $\forall n,m\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0, & m\neq n,\\ \frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi, & m=n;\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]\mathrm{d}x=0.$$

另外, 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x=2\pi$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot 1\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot 1\mathrm{d}x=0.$$

因此 (1), (2) 和 (3) 成立.

12.1.2 周期为 2π 的函数的傅里叶级数

与幂级数理论一样, 一个函数能否展成傅里叶级数是傅里叶级数理论中的一个重要问题.

现在设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上成立, 且右边的级数一致收敛到 $f(x)$. 显然, 此时 $f(x)$ 是一个 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数. 由函数项级数的一般性理论知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定积分可通过该级数逐项积分得到. 对于 $\forall k\geqslant 0$, 利用基本三角函数系的正交性得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x=&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x\\&+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x\\=&\pi a_k,\end{aligned}$$

因此有

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

由于对于 $\forall k\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x=&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin kx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\mathrm{d}x\\&+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\mathrm{d}x\\=&\pi b_k,\end{aligned}$$

因此有

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\cdots.$$

以上的分析给我们提供了两点信息:

(1) 如果一个函数 $f(x)$ 能展成傅里叶级数并且其傅里叶级数能逐项积分, 则该 $f(x)$ 的傅里叶级数具有唯一性.

(2) 如果一个函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 我们就可计算出

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{12.1.2}$$

及

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots, \tag{12.1.3}$$

并形式地得到一个与 $f(x)$ 有关系的傅里叶级数. 为此我们形式地将它记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \tag{12.1.4}$$

其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots), b_n(n=1,2,\cdots)$ 分别由 (12.1.2) 和 (12.1.3) 式给出. 今后我们将称 $a_n, b_n(n=1,2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**, 并称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

在这里读者应注意到, 我们只是说 $f(x)$ 与该傅里叶级数有关 (在 (12.1.4) 式中, 我们用记号 $\sim$, 而不用等号 $=$), 这是因为我们并不知道该傅里叶级数是否能收敛于 $f(x)$. 我们很容易举出例子来说明该傅里叶级数很可能不点点收敛于 $f(x)$. 事实上, 改变 $f(x)$ 的有限个点的值, 并不改变 (12.1.2) 和 (12.1.3) 中的每个积分的值. 设 $f(x)$ 改变有限个点的值后得到的函数为 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的傅里叶级数. 但是在这有限个点, 该傅里叶级数显然不可能同时收敛到 $f(x)$ 与 $g(x)$.

但对于连续函数 $f(x)$, 我们有以下结论.

定理 12.1.1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 以 2π 为周期, 且 $f(x)$ 的傅里叶系数全为 0, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒为 0.

证明 倘若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上不恒为 0, 则在 $(-\pi,\pi)$ 内存在 x_0, 使得 $f(x_0)\neq 0$. 我们不妨设 $f(x_0)>0$. 由 $f(x)$ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = M > 0.$$

由于 $f(x)$ 的傅里叶系数全为 0, 容易看出对于任何的三角多项式 $T(x)$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)\mathrm{d}x = 0.$$

我们现在取定以下三角多项式

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1+\cos(x-x_0)-\cos\delta\\ &= 1+\cos x\cos x_0+\sin x\sin x_0-\cos\delta.\end{aligned}$$

显然存在 $r>1$, 对于 $x\in\left(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2}\right)$, 有 $T_0(x)\geqslant r>1$. 注意到当 $x\in[x_0-\pi,x_0+\pi]\backslash(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $|T_0(x)|\leqslant 1$.

对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 由于 $T_0^n(x)$ 是一个三角多项式, 因此有

$$\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{12.1.5}$$

另一方面, 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\left|\int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\pi M\cdot 1^n=2\pi M.$$

而当 $n\to+\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x &\geqslant \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant Mr^n\delta\to+\infty.\end{aligned}$$

因此有

$$\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)T_0^n(x)\mathrm{d}x\to+\infty\quad(n\to+\infty).$$

这与 (12.1.5) 矛盾. 证毕.

对于定理 12.1.1, 我们以后有更加简单的方法来证明之.

在举例来熟悉函数的傅里叶级数之前, 我们必须注意到以下事实: 对于在长度为 2π 的半开半闭区间上定义的一个函数 $f(x)$, 我们总是可以以 2π 为周期将它延拓到 $(-\infty,+\infty)$. 因此在下面的例子中的函数

均是在一个长度为 2π 的区间给出, 但它们可以看成是一个周期为 2π 的函数的限制.

例 12.1.1 设函数 $f(x) = x \ (-\pi \leqslant x < \pi)$, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解 $f(x)$ 周期延拓后的图像见图 12.1.1. 注意到 $\sin kx (k \in \mathbb{N})$ 是奇函数, 而 $\cos kx (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ 是偶函数, 因此, 当 $f(x) = x$ 为奇函数时, 有 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

因此

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nx.$$

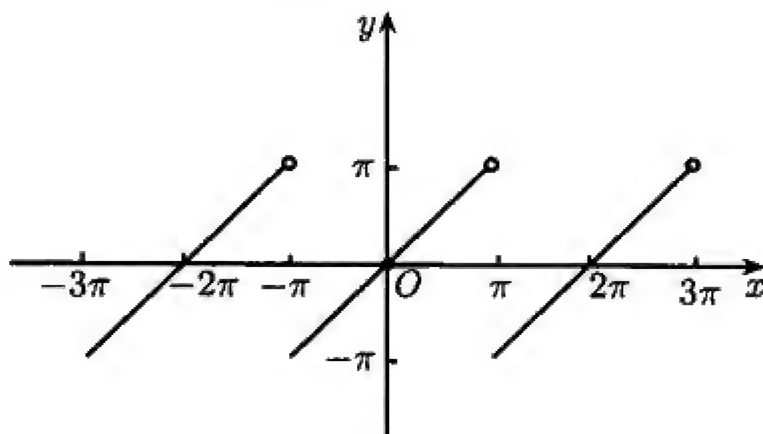


图 12.1.1

在例 12.1.1 中, 严格说来 $f(x)$ 只在 $(-\pi, \pi)$ 中是奇函数. 但由于改变 $x = -\pi$ 一点处的函数值不会改变 $f(x)$ 的傅里叶系数, 因此我们不妨设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是奇函数. 在下面的例子中, 我们说一个函数 $f(x)$ 是奇 (偶) 函数, 在大部分情形下仅是对 $f(x)$ 在一对称区间中除去若干个点后是奇 (偶) 函数而言的.

思考题 设函数 $f(x) = x (x \in [0, 2\pi))$, 是否 $f(x)$ 的傅里叶级数

也是 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{n}\sin nx$?

例 12.1.2 设函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(x\in[0,2\pi))$, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解 由图 12.1.2 可见, $f(x)$ 是奇函数, 因此 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$. 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\\=&-\frac{1}{n\pi}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

因此我们有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

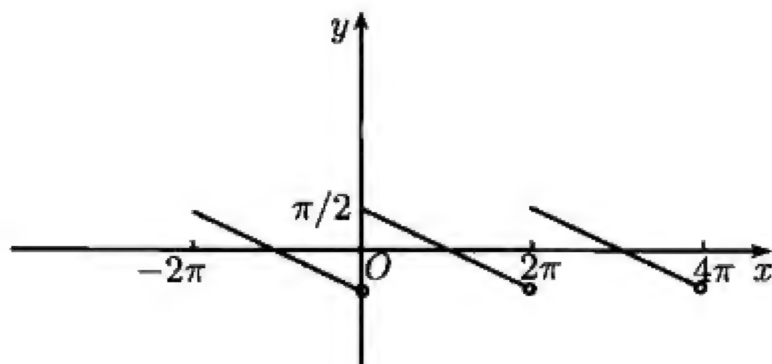


图 12.1.2

注 从上例可以看出, 当考查 $f(x)$ 的奇偶性时, 可结合其延拓后的图像来考查, 不要仅仅从所给函数的解析式来下结论.

例 12.1.3 设函数 $f(x)=x^2(x\in[0,2\pi))$, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解 $f(x)$ 周期延拓后的图像如图 12.1.3 所示.

从图 12.1.3 可以看出 $f(x)$ 不具有奇偶性. 由于 $f(x)$ 的傅里叶系数的积分中的被积函数均为以 2π 为周期的函数, 因此我们只需在一个长度为 2π 的区间来求之即可. 因此有

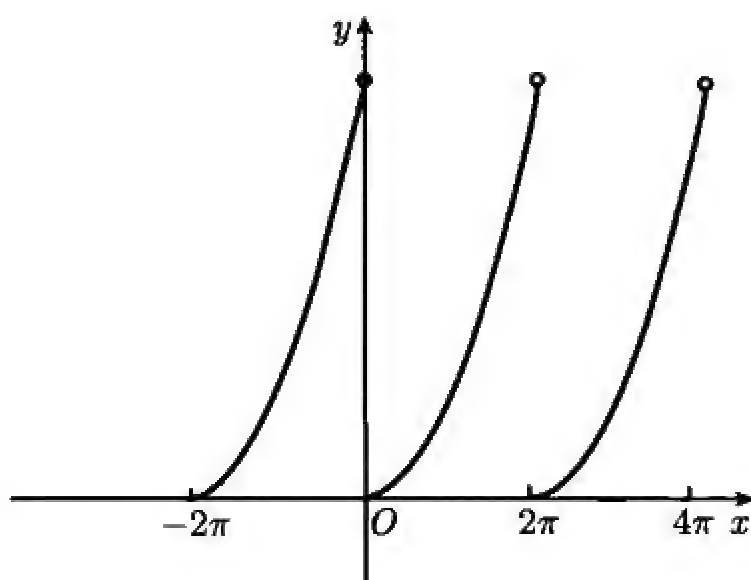


图 12.1.3

$$
\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi^2. \\
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x \\
=& \frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots, \\
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x \\
=& -\frac{1}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\mathrm{d}x \\
=& -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x \\
=& -\frac{4\pi}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots,
\end{aligned}
$$

因此

$$
f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.
$$

12.1.3 正弦级数与余弦级数

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, 而且它是一个在 $[a,b]$ 上可积函数的限制, 我们将称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可积. 设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内可积, 则我们可以将 $f(x)$ 延拓成 $(-\pi,\pi)$ 中的奇函数 $\widetilde{f}(x)$ (称之为奇延拓), 然后再将它周期地延拓到 $(-\infty,+\infty)$. 在这种情形下, $\widetilde{f}(x)$ 的傅里叶系数中

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

而

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

因此

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

此时我们称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ 为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的**正弦级数**.

设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内可积, 则我们也可以将 $f(x)$ 延拓成 $(-\pi,\pi)$ 中的偶函数 $\widetilde{f}(x)$ (称之为偶延拓), 然后再将它周期地延拓到 $(-\infty,+\infty)$. 在这种情形下, $\widetilde{f}(x)$ 的傅里叶系数中

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

而

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

因此

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx.$$

此时我们称 $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的**余弦级数**. 由于在上述的奇延拓与偶延拓中, 延拓后的函数虽然不是唯一的, 但是仅仅

在 $x=0,\pm\pi$ 处的值可能不同, 因此它们的傅里叶系数是相同的. 这说明了上面定义的正弦级数与余弦级数是由 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的值唯一确定的.

例 12.1.4 分别求函数 $f(x)=x^2(x\in(0,\pi))$ 的正弦级数与余弦级数.

解 先求正弦级数. 由

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^2\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right) \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],\quad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

我们求得 $f(x)$ 的正弦级数为

$$x^2\sim 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

再求余弦级数. 由

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) \\
&= (-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

我们求得 $f(x)$ 的余弦级数为

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

12.1.4　周期为 $2T$ 的函数的傅里叶级数

我们现在来讨论一下周期为 $2T>0$ 的函数的傅里叶级数问题. 设函数 $f(x)$ 以 $2T$ 为周期且在任何有限闭区间上可积, 作自变量变换 $x=\dfrac{T}{\pi}t$, 则函数 $F(t)=f\left(\dfrac{T}{\pi}t\right)$ 以 2π 为周期且在任何有限闭区间上可积. 设

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

则将变量 t 变回变量 x 后, 我们便得到 $f(x)$ 的傅里叶级数:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

例 12.1.5　求 $f(x)=x\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的傅里叶级数.

解　$f(x)$ 是以 π 为周期的函数, 且为奇函数, 因此 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$. 记 $T=\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x\cos x\sin 2nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{T}\int_0^T x[\sin(2n-1)x+\sin(2n+1)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{T}\left[-\frac{1}{2n-1}x\cos(2n-1)x\Big|_0^T+\frac{1}{2n-1}\int_0^T\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\right]\\&\quad+\frac{1}{T}\left[-\frac{1}{2n+1}x\cos(2n+1)x\Big|_0^T+\frac{1}{2n+1}\int_0^T\cos(2n+1)x\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)T + \frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)T\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{T}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{16n}{(4n^2-1)^2}, \quad n = 1, 2, \cdots.
\end{aligned}
$$

因此

$$
x\cos x \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}16n}{\pi(4n^2-1)^2}\sin 2nx.
$$

对于周期为 $2T$ 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, 我们也可以用如下的办法来加以讨论. 取基本三角函数系

$$
1,\ \cos\frac{\pi}{T}x,\ \sin\frac{\pi}{T}x,\ \cos\frac{2\pi}{T}x,\ \sin\frac{2\pi}{T}x,\ \cdots,\ \cos\frac{n\pi}{T}x,\ \sin\frac{n\pi}{T}x, \cdots,
$$

容易看出它们是长度为 $2T$ 的区间上的正交函数系, 平行于周期为 2π 的函数的傅里叶级数的讨论, 即可得到周期为 $2T$ 的 $f(x)$ 的傅里叶系数公式.

§12.2 傅里叶级数的敛散性

从函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的一般研究方法知, 若其前 n 项部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 具有某种有规律的表达式, 则该级数可以容易通过对其部分和序列的研究来讨论其敛散性. 傅里叶级数正是具有这种特性, 由于它的部分和序列具有很规律的表达式, 因此我们可以从它的研究中得到傅里叶级数敛散性的许多信息.

12.2.1 狄利克雷积分

从上节中我们已经知道, 若周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则可形式地得到其傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

我们现在来考查 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和序列. 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\cos kx \cos ku + \sin kx \sin ku]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

为了更加便于分析, 我们作变换 $u = x + t$, 并利用 $f(x)$ 的周期性得

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

上述 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和的积分形式将给我们提供许多有用信息. 下面我们先来对它们作一些粗略的分析. 若取 $f(x)\equiv 1$, 则其傅里叶级数的前 n 项的部分和 $S_n(x)\equiv 1$. 这说明了对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi}D_n(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$. 今后我们将称

$$\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\mathrm{d}t$$

为 $f(x)$ 的**狄利克雷积分**, 并且称 $D_n(t)$ 为**狄利克雷核**.

现取定 $x_0\in[-\pi,\pi]$, 我们来研究 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和序列 $\{S_n(x_0)\}$ 是否以 S_0 为极限. 由于

$$\begin{aligned} S_n(x_0)-S_0 &= \int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0)D_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi}G(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中

$$G(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\pi\sin\frac{t}{2}}. \tag{12.2.1}$$

对上述积分我们粗略地观察一下可以看出, 当 n 很大时, $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$

的值随着 t 在 $[0,\pi]$ 上的变化, 不断地在 x 轴的上下波动. 若 $G(t)$ 是个常数的话, 显然有

$$\int_0^{\pi} G(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t \to 0 \quad (n\to\infty).$$

若 $G(t)$ 不是常数, 但 $G(t)$ 可积, 当 $n\to\infty$ 时, 则由 $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ 在 x 轴上下不断波动, 使得 $G(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ 的积分不断相抵, 因此上面的积分也应该趋于 0.

在以下行文中, 我们经常要用到以下假定: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或有瑕点时绝对可积. 对此假定的确切意义是: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上或者是黎曼可积的, 或者具有有限个瑕点, 在 $[a,b]$ 中不含瑕点的任何闭子区间 $f(x)$ 均是黎曼可积的, 并且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分是收敛的.

我们有下面的黎曼–勒贝格引理.

引理 12.2.1 (黎曼–勒贝格引理)　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

证明　我们分两种情形加以证明.

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 从而它是有界的, 因此存在 $M>0$, 使得 $\forall x\in[a,b]$, 有 $|f(x)|\leqslant M$. 再由 $f(x)$ 的可积性, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b,$$

对于 $i=1,2,\cdots,N$, 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 和

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在我们取定一个满足上述条件的固定分割, 注意到对每个 $1 \leqslant i \leqslant N$, 当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时, 有

$$0 \leqslant f(x) - m_i \leqslant M_i - m_i,$$

因此有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-m_i)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| + \left|\sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^N (M_i - m_i)\Delta x_i + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^N |m_i| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2NM}{\lambda}.\end{aligned}$$

由于这个分割是固定的, 因此存在 $X = \dfrac{4NM}{\varepsilon}$, 当 $\lambda > X$ 时, 有 $\dfrac{2NM}{\lambda} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 所以, 当 $\lambda > X$ 时, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

这就证明了当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有瑕点.

不妨设 $f(x)$ 只有一个瑕点 $c \in (a,b)$. 由于 $f(x)$ 绝对可积, 因此存在 $\delta > 0$, 使得 $a < c-\delta < c+\delta < b$ 和 $\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}$, 从而对任意的 λ, 有

$$\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

再由于 $f(x)$ 在 $[a,c-\delta]$ 及 $[c+\delta,b]$ 上可积, 因此存在 $X>0$, 当 $\lambda>X$ 时, 有

$$\left|\int_a^{c-\delta} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

及

$$\left|\int_{c+\delta}^{b} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而当 $\lambda>x$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| =&\left|\int_a^{c-\delta} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|\\&+\left|\int_{c+\delta}^{b} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|\\<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此由 (1) 和 (2) 推出在定理的假设下有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

同理可证

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证毕.

现在我们回过头来考查以下等式:

$$S_n(x_0)-S_0=\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\pi\sin\dfrac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t.$$

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 我们来看该式当 $n\to\infty$ 时的变化情况.

在 $t=0$ 的某个邻域外, 若 $G(t)$($G(t)$ 由 (12.2.1) 定义) 没有瑕点显然是可积的, 并且有瑕点时也绝对可积, 因此由黎曼–勒贝格引理 (引理 12.2.1) 有

$$\int_{\delta}^{\pi} G(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t \to 0 \quad (n\to\infty).$$

所以当 n 趋于无穷时, $S_n(x_0)-S_0$ 是否趋于 0 仅与 $f(x_0\pm t)$ 在 $t=0$ 附近的值有关, 换句话说仅与 $f(x)$ 在 x_0 附近的值有关. 因此我们有

定理 12.2.2 (黎曼局部化定理) 设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 处的敛散性只与 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 的值有关, 其中 $\delta>0$ 是一任意给定的正常数.

值得指出的是, 一个函数 $f(x)$ 的傅里叶系数是由 $f(x)$ 与基本三角函数系中每个函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分得到. 换句话说, 它们依赖于 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)$ 的取值. 而以上定理却告诉我们: 傅里叶级数在 x_0 处的敛散性只依赖于 $f(x)$ 在 x_0 附近的局部性质. 这个结果有点出乎人们的意料.

现在我们继续来研究 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处的敛散性. 为了更加容易估计 $S_n(x_0)-S_0$, 我们注意到在 $f(x)$ 的狄利克雷积分中被积函数的 $2\sin\dfrac{t}{2}$ 可以用 t 代替. 换句话说, 若 $f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或具有瑕点时绝对可积, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}f(t)\mathrm{d}t \quad 与 \quad \int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}f(t)\mathrm{d}t$$

具有相同的敛散性, 并且它们收敛时具有相同的极限.

事实上, 由

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t-2\left(\frac{t}{2}+o(t^2)\right)}{2t\sin\frac{t}{2}}=0,$$

定义

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}-\dfrac{1}{t}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 因此有界, 从而 $f(t)\varphi(t)$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或有瑕点时绝对可积. 由黎曼–勒贝格引理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} f(t)\varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t=0.$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} f(t)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(t)\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t.$$

注　上述等式的确切意义是; 等式两边的极限具有相同的敛散性, 并且它们收敛时具有相同的极限. 另外, 由黎曼–勒贝格引理及上面的分析, 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t.$$

利用上述等式, 我们可以计算出积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

事实上, 我们已经知道该积分是收敛的, 取 $f(t)\equiv 1$, 则有

$$\begin{aligned}1&\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

12.2.2 傅里叶级数的收敛判别法

对于给定的 $x_0 \in [-\pi, \pi]$, 我们继续进行周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处敛散性的讨论. 根据上一小节推导, 我们知道 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处收敛到 S_0 的充分必要条件是: 对充分小的正数 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t = 0. \qquad (12.2.2)$$

该极限的收敛性还可转化为如何选择 S_1 及 S_2, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t)-S_1}{t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t = 0 \qquad (12.2.3)$$

及

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0-t)-S_2}{t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t = 0. \qquad (12.2.4)$$

显然当 (12.2.3) 及 (12.2.4) 成立时, 令 $S_0 = \dfrac{S_1+S_2}{2}$, 则 (12.2.2) 必成立.

我们首先来看一个简单的情形: 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'(x_0).$$

特别地, 我们推知 $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ 在 x_0 的邻域内有界. 这说明 $t=0$ 不是 $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ 的瑕点, 因此取 $S_1 = f(x_0)$, 则 (12.2.3) 成立. 同理, 当 $f(x)$ 在 x_0 处可导时, 取 $S_2 = f(x_0)$, 则 (12.2.4) 成立. 因此, 当 $f(x)$ 在 x_0 处可导时, 取 $S_0 = f(x_0)$, 则 (12.2.2) 成立.

基于上述的结果, 我们进一步讨论傅里叶级数在一个区间上的敛散性. 为此我们引入一个函数分段可微的概念.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义. 若存在 $[a,b]$ 的分割

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得 $f(x)$ 仅以 x_i 为第一类间断点, 并且在 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 处, 存在推广的单侧导数, 即

$$\lim_{h\to0+0}\frac{f(x_i+h)-f(x_i+0)}{h}\triangleq f'_+(x_0)$$

与

$$\lim_{h\to0-0}\frac{f(x_i+h)-f(x_i-0)}{h}\triangleq f'_-(x_0)$$

存在 (在 $[a,b]$ 的端点处存在推广的左右导数); 而当 $x\in(x_{i-1},x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 时, $f'(x)$ 存在. 若 $f(x)$ 满足以上条件, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**分段可微**的.

对于分段可微函数, 若在 (12.2.3) 式左边取 $S_1=f(x_0+0)$, 在 (12.2.4) 式左边取 $S_2=f(x_0-0)$, 则 (12.2.3), (12.2.4) 式同时成立. 因此我们有

定理 12.2.3 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 内分段可微, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛到 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, 即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\quad x\in[-\pi,\pi].$$

下面我们来看一些更为精细的结果. 对于 $x_0\in[-\pi,\pi]$, 我们令

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0,\tag{12.2.5}$$

则 $\varphi(t)$ 在 $t=0$(即 $f(x)$ 在 x_0) 附近的性质对傅里叶级数的收敛起着至关重要的作用.

由黎曼–勒贝格引理, 若要 (12.2.2) 成立, 只要 $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 在 $t=0$ 的邻域绝对可积即可. 因此我们有

定理 12.2.4 (狄尼定理) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 并且对于 $x_0\in[-\pi,\pi]$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\int_0^\delta\frac{|\varphi(t)|}{t}\mathrm{d}t<+\infty,$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处收敛到 S_0(其中 $\varphi(t)$ 见 (12.2.5)).

证明 由定理所给条件知 $\frac{\varphi(t)}{(t)}$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积. 又由 $f(x)$ 的条件知 $\frac{\varphi(t)}{(t)}$ 在 $[\delta,\pi]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 因此 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\pi]$ 上绝对可积. 由黎曼–勒贝格引理推出

$$\lim_{n-\infty}[S_n(x_0)-S_0]=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t=0.$$

证毕.

从定理 12.2.4 立即可推出下面的李普西茨 (Lipschitz) 定理.

定理 12.2.5 (李普西茨定理) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上瑕可积或有瑕点时绝对可积, 再设 $f(x)$ 在 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 处满足 α-赫尔德 $(\alpha>0)$ 连续性, 即存在 $L>0,\delta>0$, 使得对于 $x\in U(x_0,\delta)$, 有

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\leqslant L|t|^{\alpha},$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处收敛到 $f(x_0)$.

证明 由 $f(x)$ 在 x_0 处满足 α- 赫尔德 $(\alpha>0)$ 连续性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $t\in(-\delta,\delta)$ 时, 我们有

$$\frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}\leqslant\frac{L}{t^{1-\alpha}}.$$

由于 $\alpha>0$, 我们推出

$$\int_0^{\delta}\frac{|\varphi(t)|}{t}\mathrm{d}t<+\infty,$$

其中 $\varphi(t)$ 见 (12.2.5). 由狄尼定理知 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处收敛到 $f(x_0)$. 证毕.

最后我们来证明一个在理论上及应用上都十分有用的结果, 即单调函数的傅里叶级数必定收敛.

定理 12.2.6 (狄利克雷定理)　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 再设 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 不是 $f(x)$ 的瑕点, 并且存在 $\delta_0>0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_0,x_0)$ 及 $(x_0,x_0+\delta_0)$ 内分别单调, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 x_0 处收敛到

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

证明　先设 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta_0)$ 上单调. 我们证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\delta_0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t=0. \tag{12.2.6}$$

不妨设 $f(x)$ 是单调上升的. 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

故连续函数 $G(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 由此存在常数 $M>1$, 使得对任意 $0\leqslant t_1<t_2<+\infty$, 有

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant M.$$

由 $f(x)$ 的单调性, 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta<\delta_0$, 使得当 $0<t<\delta$ 时, 有

$$0\leqslant f(x_0+t)-f(x_0+0)<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

为了估计积分, 我们记

$$\begin{aligned}&\int_0^{\delta_0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\\&\quad=\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\\&\qquad+\int_\delta^{\delta_0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\\&\quad\triangleq I+J.\end{aligned}$$

对于 J, 注意到 $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ 在 $[\delta,\delta_0]$ 上可积或有瑕点时绝对可积, 因此由黎曼–勒贝格引理知, $\exists\lambda_0>0$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有

$$|J|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在来估计积分 I. 由定积分第二中值定理, 存在 $\xi\in(0,\delta)$, 使得

$$\begin{aligned}|I|&=\left|\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\right|\\&=|f(x_0+\delta)-f(x_0+0)|\left|\int_{\xi}^{\delta}\frac{1}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\right|\\&=|f(x_0+\delta)-f(x_0+0)|\left|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2M}M=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\left|\int_0^{\delta_0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\lambda t\mathrm{d}t\right|\leqslant|I|+|J|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(12.2.6) 得证. 同理可证当 $f(x)$ 在 $[0,\delta_0]$ 上单调下降时, (12.2.6) 也成立.

由于 $f(x_0+t)$ 和 $f(x_0-t)$ 在 $[0,\delta_0]$ 上分别单调, 利用上面已证结果我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta_0}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t=0.$$

证毕.

注 在定理的假设下, 由黎曼–勒贝格引理我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_0}^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{t}\mathrm{d}t=0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

另外, 从定理 12.2.6 的证明中我们可以看出, 当 $f(x)$ 在 x_0 的 δ_0 邻域内单调时, 下述等式成立:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x_0\pm t)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}f(x_0\pm 0).$$

最后我们来小结一下本节的内容. 在实际应用中, 下述的结论是经常用到的.

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 若 $f(x)$ 满足以下条件之一:

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段单调;

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段可微,

则对于 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)$ 的傅里叶级数收敛到

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

因此, 对 §12.1 中的例子, 我们有

例 12.2.1　函数 $f(x)=x(-\pi\leqslant x<\pi)$ 的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases}x, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & x=-\pi,\pi.\end{cases}$$

例 12.2.2　函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(x\in[0,2\pi))$ 的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & x\in[0,2\pi),\\ 0, & x=0,2\pi.\end{cases}$$

例 12.2.3　函数 $f(x)=x^2(x\in[0,2\pi))$ 的傅里叶级数为

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$=\begin{cases}x^2, & x\in(0,2\pi),\\ 2\pi^2, & x=0,2\pi.\end{cases}$$

例 12.2.4 函数 $f(x)=x^2(x\in[0,\pi))$ 的正弦级数与余弦级数分别为

$$2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}=\begin{cases}x^2, & x\in[0,\pi),\\ 0, & x=\pi\end{cases}$$

和

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,\quad x\in[0,\pi].$$

例 12.2.5 函数 $f(x)=x\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{16n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx=x\cos x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

注 在例 12.2.5 中函数的周期为 π, 但相应的傅里叶级数收敛性的结论仍真, 请读者自己证明该结论.

例 12.2.6 设 $0<\alpha<1$, 试求函数 $f(x)=\cos\alpha x(x\in(-\pi,\pi))$ 的傅里叶级数, 并求出该傅里叶级数的和函数.

解 显然, $f(x)$ 为偶函数, 因此

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha\pi,\\ a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha x\cos nx\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x]\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\right]\Bigg|_0^\pi\\ &=(-1)^n\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)},\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

注意到 $\cos\alpha x$ 分段可微且连续, 因此当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时, 有

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right)=\cos\alpha x.$$

利用以上展式, 我们可以得到一些有趣的推论 (见本章习题).

最后我们简单地介绍一下关于傅里叶级数敛散性的研究历史. 傅里叶在研究热传导问题时引进了傅里叶级数后, 当时他曾认为基本上所有函数的傅里叶级数都收敛. 后来狄利克雷给出了傅里叶级数敛散性判别法. 在狄利克雷的研究工作之后, 人们以为任何连续函数的傅里叶级数都收敛到该函数, 但人们在 1873 年给出了例子, 从这些例子可以看出一个连续函数的傅里叶级数可以在一个无穷点集上发散, 而且后来人们还举出了可积函数的傅里叶级数处处发散的例子. 在傅里叶级数的敛散性这个问题上直到近代还有一些重要的研究工作, 由于这些工作的介绍要用到实变函数课程中的知识, 我们在这里不再赘述.

§12.3 傅里叶级数的其他收敛性

在上节中我们主要讨论了函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的点收敛性. 在本节中, 我们将讨论傅里叶级数有关的其他一些收敛性. 不失一般性, 在本节中我们假定 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数. 读者不难将本节的结果推广到 $f(x)$ 是以 $2T$ 为周期的函数的情形.

12.3.1 连续函数的三角多项式一致逼近

我们在幂级数理论中已经证明了 $[a,b]$ 上连续函数必可由多项式一致逼近. 在本小节中, 我们证明以 2π 为周期的连续函数必可由三角多项式一致逼近, 即证明

定理 12.3.1 (魏尔斯特拉斯第二逼近定理) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 则存在

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\quad(n=1,2,\cdots),$$

使得 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|T_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

为了证明定理 12.3.1, 我们需要做些准备工作. 从上节我们介绍的傅里叶级数敛散性研究的历史中可知, 一般来说, 定理 12.3.1 中的三角多项式序列不能取 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和序列. 因此我们必须另找其他的三角多项式序列. 我们回忆一下, 对一个序列 $\{x_n\}$ 来说, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$, 而反之一般不真. 因此 $\left\{y_n=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right\}$ 比 $\{x_n\}$ 来说有可能具有更好的收敛性.

设 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $S_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$ 为其部分和序列, 对于 $n=0,1,2,\cdots$, 我们记

$$S_n^*(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}.$$

我们将看到, 对于 $n\in\mathbb{N}$, $S_n^*(x)$ 也有很好的积分表达式. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}S_n^*(x)&=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sin\left(k+\dfrac12\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}2\sin\dfrac{t}{2}\sin\left(k+\dfrac12\right)t}{4\sin^2\dfrac{t}{2}}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(\cos kt-\cos(k+1)t)}{4\sin^2\dfrac{t}{2}}\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\Phi_n(t) = \dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$ 称为**费叶** (Fejér) **核**. 显然对任意的 t, 有 $\Phi_n(t) \geqslant 0$. 在上述积分表达式中令 $f(x) \equiv 1$, 我们推出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

下面我们来证明定理 12.3.1.

定理 12.3.1 的证明　我们将证明 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 的算术平均构成的序列 $\{S_n^*(x)\}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 对于任意的 $x \in [-\pi,\pi]$, 我们有下述不等式:

$$|f(x) - S_n^*(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)[f(x) - f(x+t)]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\mathrm{d}t. \qquad (12.3.1)$$

设 $|f(x)|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值为 M. 注意到 $f(x)$ 以 2π 为周期, 由 $f(x)$ 的连续性我们推出它在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 从而对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 当 x_1, x_2 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

将 (12.3.1) 式右边的积分分解成 $I_1 + I_2 + I_3$, 其中

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\mathrm{d}t,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\mathrm{d}t.$$

现在我们来估计上面的每一个积分.

对于 I_2, 我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

对于 I_1, 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2M\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2M\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\mathrm{d}t \\ &< \frac{M\pi}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

因此存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

同理可证, 存在 $N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$I_3 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 对于 $\forall x \in [-\pi, \pi]$, 有

$$|f(x) - S_n^*(x)| < \varepsilon.$$

注意到对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n^*(x)$ 仍为一个至多 n 阶的三角多项式 (且与 $S_n^*(x)$ 的阶相同), 定理 12.3.1 得证. 证毕.

例 12.3.1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且以 2π 为周期, 再设 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛. 证明 $f(x)$ 的傅里叶级数必处处收敛于 $f(x)$.

证明 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

对于 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$ 记

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2},$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$S_n^*(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 因此存在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的函数 $g(x)$, 使得对于 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = g(x).$$

因此, 对于 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) = g(x).$$

再根据定理 12.3.1, 我们有 $S_n^*(x) \rightrightarrows f(x)(x \in (-\infty,+\infty))$, 从而有 $f(x) \equiv g(x)(x \in (-\infty,+\infty))$, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in (-\infty,+\infty).$$

12.3.2 傅里叶级数的均方收敛

我们已经对函数序列 (函数项级数) 的点收敛及一致收敛有了许多研究. 对于傅里叶级数来说, 由于它与积分密切相关, 我们可以引入另一种意义下的收敛 —— 均方收敛.

为了讨论均方收敛, 我们必须对所涉及的函数附加一个稍强的条件. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除了有限个瑕点外有定义, 在 $[a,b]$ 上的任何不包含瑕点的子区间 $[c,d]$ 上可积, 并且 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分是收敛的, 则我们称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ **上平方可积**. 特别地, 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必平方可积.

定义 12.3.1 设函数 $f(x), f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上平方可积, 并且满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x=0,$$

则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上**均方收敛**于 $f(x)$.

函数序列的这种均方收敛性在一些数学分支的研究中起着重要的作用, 在傅里叶级数理论中也具有重要的理论和应用价值. 下面我们先来研究一下平方可积函数类的一些初等性质.

由于对区间 $[a,b]$ 上任意的函数 $f(x)$ 总成立

$$|f(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+1}{2}.$$

因此, 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上平方可积时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定绝对可积. 这说明 $f(x)$ 平方可积的条件要比 $f(x)$ 绝对可积的条件强一些.

对于区间 $[a,b]$ 上平方可积的函数 $f(x),g(x)$, 我们有以下的结论:

(1) $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积;

(2) $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上平方可积.

事实上, 对于 $\forall x\in[a,b]$, 我们有

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{f^2(x)+g^2(x)}{2},$$

因此 (1) 成立.

记

$$\varphi(t)=\int_a^b (t|f|+|g|)^2\mathrm{d}x$$
$$=t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

则对于 $\forall t\in\mathbb{R}$, 有 $\varphi(t)\geqslant 0$. 由此我们推知上式右边关于 t 的一元二次方程的判别式 $\Delta\leqslant 0$, 即

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由此不等式我们也可推出 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的绝对可积性. 利用这个不等式, 我们还有

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\left[\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}\right]^2.$$

由此得到

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.$$

上面的不等式也称为**柯西不等式**, 从它可以直接看出 $f(x)+g(x)$ 是平方可积的. (2) 得证.

现在我们来考虑函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的均方收敛性问题. 显然, 当 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积时, 对任意的三角多项式

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),$$

$f(x)-T_n(x)$ 也在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积. 设 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 令

$$\Delta_n=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}},$$

则我们称 Δ_n 为 $f(x)-T_n(x)$ 的**平均偏差**. 下面我们来计算 Δ_n^2:

$$\begin{aligned}\Delta_n^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{\alpha_0a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\\&\quad+\frac{{\alpha_0}^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[-\alpha_0a_0+\frac{\alpha_0^2}{2}-2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\right.\\&\quad\left.+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]\\&\quad-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).\end{aligned}$$

从上面的等式我们可以得出以下一系列的结论.

定理 12.3.2 (傅里叶级数最佳逼近)　设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积，并设其傅里叶级数的部分和序列为 $\{S_n(x)\}$, 则对任何 $n \in \mathbb{N}$ 阶三角多项式 $T_n(x)$, 成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x,$$

并且当且仅当 $S_n(x) \equiv T_n(x)$ 时上面不等式中等号成立.

注　从上述分析我们还知道, 在定理 12.3.2 的条件下, 对于 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和序列有以下性质：当 $m < n$ 时, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\mathrm{d}x.$$

由定理 12.3.2 可以解决我们在本小节的中心问题：

定理 12.3.3　设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积, 则对 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和序列 $\{S_n(x)\}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x = 0.$$

证明　先设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且以 2π 为周期, 由魏尔斯特拉斯第二逼近定理, 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在三角多项式 $T_{n_0}(x)$, 使得对 $\forall x \in [-\pi,\pi]$, 有

$$|f(x)-T_{n_0}(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}.$$

因此我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

现设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 我们知道存在连续函数 (可以是分段线性函数 (见例 7.3.1 的注))$g(x)$, 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

在 $x=\pm\pi$ 的充分小的邻域内对 $g(x)$ 的值进行修改, 我们可以假定满足上述不等式的 $g(x)$ 同时满足 $g(-\pi)=g(\pi)$.

由上面所证, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant 2\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x\right\}\\&\quad<\varepsilon.\end{aligned}$$

最后设 $f(x)$ 有瑕点且在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积. 此时不妨设 $f(x)$ 仅以 $x=\pi$ 为瑕点. 由假设, $\exists\delta>0$, 使得

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}\quad\text{及}\quad\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}f^2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}.$$

令

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}0, & x\in(\pi-\delta,\pi],\\ f(x), & x\in[-\pi+\delta,\pi-\delta],\\ 0, & x\in[-\pi,-\pi+\delta).\end{cases}$$

显然 $\widetilde{f}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 且 $\widetilde{f}(-\pi)=\widetilde{f}(\pi)$, 从而存在三角多项式 $T_{n_0}(x)$, 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\widetilde{f}(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}[\widetilde{f}(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x+2\int_{-\pi}^{\pi}[\widetilde{f}(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant 2\int_{\pi-\delta}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}\\&\quad<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

综合上述的证明我们知，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积，则存在三角多项式 $T_{n_0}(x)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由定理 12.3.2, 对于 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和 $S_{n_0}(x)$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因此当 $n>N(=n_0)$ 时，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_{n_0}(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证毕.

由定理 12.3.3 我们可以推出下面的帕塞瓦尔 (Parseval) 等式.

定理 12.3.4 (帕塞瓦尔等式) 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或有瑕点时平方可积，则有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由定理 12.3.3, 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

其中 $\{S_n(x)\}$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和序列. 因此我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

从帕塞瓦尔等式我们可以知道，并不是任意一个三角级数都是某

个平方可积函数的傅里叶级数. 例如, 对于三角级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt{n})^2}=+\infty$, 由帕塞瓦尔等式, 它不可能是某个平方可积函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

注 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是以 2π 为周期的函数且在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积, 并设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的傅里叶级数分别为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),$$

则成立

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n), \qquad (12.3.2).$$

事实上, 从 $f+g$ 与 $f-g$ 的帕塞瓦尔等式相减即可得到 (12.3.2). (12.3.2) 也称为**广义帕塞瓦尔等式**.

12.3.3 傅里叶级数的一致收敛性

利用帕塞瓦尔等式, 我们可以容易解决傅里叶级数的一致收敛、逐项求导以及逐项积分的问题.

定理 12.3.5 (傅里叶级数的一致收敛性) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证明 设 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$f'(x)$ 的傅里叶级数为

$$f'(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx).$$

我们有

$$\begin{aligned} a_0' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= nb_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

同理我们有

$$b_n' = -na_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此对于 $\forall N \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}(|a_n| + |b_n|) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n'| + |b_n'|}{n} \\ &\leqslant \left[\sum_{n=1}^{N}(a_n'^2 + b_n'^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对一致收敛. 由于 $f(x)$ 处处可导, $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛到 $f(x)$, 因此 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)$. 证毕.

定理 12.3.6 (傅里叶级数逐项微分定理) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 对于 $x \in [-\pi, \pi]$, $f''(x)$ 存在且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 再设 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

证明 直接应用定理 12.3.5 及函数项级数逐项微分定理即得. 证毕.

对于 $f(x)$ 的傅里叶级数的逐项积分问题, 我们在相当弱的条件下即能得到相应的结果.

定理 12.3.7 (傅里叶级数逐项积分定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上可积, 且以 2π 为周期, 再设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx + \frac{b_n(1-\cos nx)}{n}\right]$$

在 $[0, 2\pi]$ 成立.

证明 对于 $x \in [0, 2\pi]$, 作

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & t = 0, t = x, \\ \pi, & t \in (0, x), \\ 0, & t \in (x, 2\pi). \end{cases}$$

设 $g(t)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$, 则由计算直接得出

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x, \\ \alpha_n &= \frac{\sin nx}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots), \\ \beta_n &= \frac{1 - \cos nx}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

由关于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的帕塞瓦尔等式即得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \pi f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx + \frac{b_n(1-\cos nx)}{n}\right], \quad x \in [0,2\pi].$$

证毕.

例 12.3.2　求函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \pi x (x \in [0,2\pi])$ 的傅里叶级数, 并求其和函数.

解　由例 12.2.2 有

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin x}{n},$$

因此由定理 12.3.7, 对于 $\forall x \in [0.2\pi]$, 有

$$\int_0^x \frac{\pi - t}{2}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0,2\pi].$$

所以

$$\frac{x^2}{2} - \pi x = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0,2\pi].$$

习 题 十 二

1. 求下列周期为 2π 的函数的傅里叶级数:

(1) $f(x) = |x|,\ -\pi \leqslant x < \pi$;　　(2) $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x},\ -\pi \leqslant x < \pi$;

(3) $f(x) = x\cos x,\ -\pi \leqslant x < \pi$;　　(4) $f(x) = \cos^2 x, -\pi \leqslant x < \pi$;

(5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \\ -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$　　(6) $f(x) = \sin^4 x$;

(7) $f(x) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\ (|r| < 1)$;　　(8) $f(x) = \ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.

2. 求下列周期为 2π 的函数的正弦级数和余弦级数:

(1) $f(x)=\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$; (2) $f(x)=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$;

(3) $f(x)=x(\pi-x),\ 0\leqslant x\leqslant\pi$; (4) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$

3. 求下列周期为 $T>0$ 的函数的傅里叶级数:

(1) $f(x)=x,\ 0\leqslant x<T$;

(2) $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<T/2,\\ 0, & T/2\leqslant x<T,\end{cases}$ 其中 A 是常数.

4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数, 并且具有连续的二阶导数, 再设 $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的傅里叶级数, 并证明存在常数 $C>0$, 使得

$$|a_n|\leqslant\frac{C}{n^2},\quad |b_n|\leqslant\frac{C}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

5. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,2\pi]$ 上可表为两个单调函数的差, 它的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

证明: $a_n=O\Big(\dfrac{1}{n}\Big), b_n=O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

6. 证明下列等式:

(1) $x=\pi-2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\ (0<x<2\pi)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$;

(2) $(x-\pi)^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;

(3) $x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\Big)\ (0<x<2\pi)$;

(4) $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

(5) $\ln\Big|\sin\frac{x}{2}\Big|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$ ($x\neq 2k\pi, k$ 是整数), $\ln 2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

(6) $\ln\Big|2\cos\frac{x}{2}\Big|=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}$ ($x\neq(2k+1)\pi, k$ 是整数).

7. 求出使下式成立的 x 范围: $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$. 由此求出:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

8. 证明:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\begin{cases}\pi/4, & 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\\ -\pi/4, & (2k-1)\pi<x<2k\pi,\\ 0, & x=k\pi.\end{cases}$$

由此求出: (1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$;　(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有连续的导数, 并满足 $f(0)=f(2\pi)$ 和 $\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明: $\int_0^{2\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$; 再设存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 及 $\delta>0$, 使得下面 (1) 或者 (2) 成立:

(1) $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上可表为两单调函数的差;

(2) $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 均存在, 且 $\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\mathrm{d}t$

和 $\int_0^{\delta} \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\mathrm{d}t$ 存在.

证明:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}\mathrm{d}t=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

11. 证明存在无穷多个傅里叶级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛到 0.

12. (1) 求函数 $f(x)=\cos\alpha x$ $(x\in(-\pi,\pi), 0<\alpha<1)$ 的傅里叶级数, 并指出该傅里叶级数的和函数;

(2) 证明 $\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$;

(3) 令 $\alpha=\frac{x}{\pi}$, 并利用 (2) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

13. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数.

(1) 对于 $\forall h>0$, 令 $F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$. 证明 $F(x)$ 是以 2π 为周期的连续可微函数.

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<h<\delta$ 时, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$|F(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

(3) 利用上述结果证明: 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $T_n(x)$, 使得对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$.

14. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的傅里叶级数相等的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

15. 求函数 $f(x)=x$ $(x\in(-\pi,\pi))$ 的傅里叶级数. 通过对 $f(x)$ 的傅里叶级数逐项积分求函数 $g(x)=x^2$ $(x\in(-\pi,\pi))$ 和 $h(x)=x^3$ $(x\in(-\pi,\pi))$ 的傅里叶级数.

部分习题答案与提示

第 七 章

1. $\alpha T+\dfrac{\beta}{2}T^2$.　　**2.** 用反证法, 从定积分的定义推出矛盾.

3. (1) $\ln 2$;　(2) $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$;　(3) 4π.　　**4.** $\dfrac{1}{\alpha+1}$.

5. 从定积分的定义直接给予证明.

6. 必要性是显然的. 充分性的证明可如下进行: 在所给的条件下, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 Δ, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

7. 对于 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 记 $\omega_i(h)$ 为函数 $h(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的振幅, 则有 $\omega_i(f^+)\leqslant\omega_i(f)$ 和 $\omega_i(f^-)\leqslant\omega_i(f)$. 因此当 $f\in R[a,b]$ 时, 有 $f^+\in R[a,b]$ 和 $f^-\in R[a,b]$. 由 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ 推出必要性.

8. 考查 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i$ 的差.

9. (1) 考查 $f(x)$ 与 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在小区间上的振幅之间的关系;

(2) 考查 $f(x)$ 与 $\ln f(x)$ 在小区间上的振幅之间的关系.

10. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 分别记 M_i 和 m_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的上确界与下确界, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon$. 因此可以构造分段线性函数 $g(x)$ 和 $h(x)$.

11. 由 $f(x)$ 的一致连续性, 在 $g(x)$ 振幅很小的区间, $f(g(x))$ 的振幅也很小.

12. 利用 $f(x)$ 的可积性可以找到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$, 使得 $[a_{n+1},b_{n+1}]$ 落在 $[a_n,b_n]$ 三等分的中间部分, 并且 $f(x)$ 在 $[a_n,b_n]$ 上的振幅 $\omega_n\to 0(n\to\infty)$. 证明区间套的交点为 $f(x)$ 的连续点.

13. 先用有限个长度很小的区间盖住这有限个聚点, 然后利用定理 7.2.5 的方法证明之.

14. 利用 13 题. **15.** 利用 12 题.

16. 利用可积性以及定理 7.2.4.

17. (1) <0; (2) <0; (3) >0.

18. 考虑积分 $\int_a^b[f(x)-tg(x)]^2\mathrm{d}x$, 其中 t 为参数.

19. (1) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x<\varepsilon$. 再注意到 $\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\to 0$ 和 $\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\to 0$ $(n\to\infty)$, 即可证明 (1).

(2) 对任意的 $\delta>0$, 序列 $\left\{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\right\}$ 与 $\left\{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\right\}$ 都是序列 $\left\{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\right\}$ 的高阶无穷小.

20. $f(x)\equiv 0$.

21. (1) 首先, 存在 $\xi\in[a,b]$ 上, 使得 $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)|$; 其次, 对于 $\forall x\in[a,b]$, $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant|f(x)-f(\xi)|$.

22. 考虑证明 $f''(x)=0$, $\forall x\neq 0$.

23. 注意到次数为 n 的多项式至多有 n 个实根.

24. (1) 利用分部积分; (2) 利用柯西–施瓦茨不等式.

25. (1) 0; (2) $\frac{1}{1+\alpha}$; (3) $\frac{1}{\alpha}$.

26. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) 2; (3) $\frac{a}{2}$; (4) $\frac{n}{n+1}$;

(5) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a$; (6) $\frac{4}{15}$; (7) $\frac{\pi}{16}a^4$; (8) $\frac{5}{144}\pi^2$;

(9) $1-\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$; (10) $240-88\mathrm{e}$;

(11) $\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$; (12) 0;

(13) $\ln(n!)$; (14) $\frac{(\tan 1)^{2n-1}}{2n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\tan 1)^{2k-1}}{2k-1}-1$;

(15) $-\frac{\pi^3}{4}$; (16) $(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$.

27. (1) $-\frac{1}{2}$; (2) 16.

28. 对于充分大的 T, 记 $T = 2n\pi + l$, 其中 $0 \leqslant l < 2\pi$, 再利用积分区间的可加性.

29. 利用积分变换.

30. 记 M, m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值, 记 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点集合为 E. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]\backslash E$ 为常数, 则结论显然成立. 否则存在 $[a,b]\backslash E$ 的子区间 $[x_1, x_2]$, 使得对于 $x \in [x_1, x_2]$, 有 $f(x) < M$, 以及存在 $[a,b]$ 的子区间 $[x_1', x_2']$, 使得对于 $x \in [x_1', x_2']$, 有 $f(x) > m$. 由定积分的性质即可推出结论.

31. 1.

32. (1) 利用 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{(1+\alpha)\sqrt{1+\xi}}$, 其中 $\xi \in [0,1]$.

(2) 利用 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2\tan^2 x} = \frac{\pi}{32(1+\xi^2\tan^2\xi)}$, 其中 $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

34. 可以设 $f(x) \geqslant 0$, 否则考虑 $f(x) - f(\pi)$, 然后利用定积分第二中值定理即可.

35. 设 $f(x_0) = M$. 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 存在包含 x_0 的闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a,b]$, 使得 $f(x) \geqslant M - \varepsilon, \forall x \in [x_1, x_2]$. 因此对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\left[\int_{x_1}^{x_2}(M-\varepsilon)^n\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_a^b M^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}.$$

36. 先用定积分第一中值定理, 然后用罗尔微分中值定理.

37. 利用积分第二中值定理.

38. (1) $\frac{1}{3}$;　(2) $4\sqrt{2}$;　(3) $\frac{4}{3}$;

(4) $\displaystyle\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

39. 利用定积分的几何意义.

40. (1) $3\pi a^2$;　(2) $\frac{a^2}{3}(4\pi^3 + 3\pi)$;　(3) $\frac{3\pi c^4}{8|ab|}$.

41. (1) a;　(2) $\frac{\pi}{4}a^2$;　(3) $\frac{3}{2}a^2$.

42. (1) $\frac{3}{8}\pi$;　(2) $\sqrt{2}\pi$;　(3) $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$;　(4) 1;　(5) $\sqrt{\frac{4}{4-a^2}}\cdot\pi$.

43. 绕 x 轴旋转时的体积为 $\frac{\pi}{5}h^5$, 绕 y 轴旋转时的体积为 $\frac{\pi}{2}h^4$.

44. $\frac{\pi}{2}abh^2$.　　**45.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.　　**46.** $\frac{2}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

47. $\frac{5}{2}\pi a^3$.　　**48.** 利用微元法.

49. (1) $6a$;　(2) $a\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right]$;

(3) $\frac{1}{2a}[2a\sqrt{1+4a^2}+\ln(2a+\sqrt{1+4a^2})]$;　(4) $2\pi^2 a$.

51. (1) $\frac{2\pi}{3}[(2+p)\sqrt{2p+p^2}-p^2]$;

(2) $\begin{cases} 2\pi|b|\left(|b|+\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}\right), & a^2>b^2, \\ 2\pi|b|\left(|b|+\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}+|b|}{|a|}\right), & a^2<b^2; \end{cases}$

(3) $\frac{12}{5}\pi a^2$;　(4) $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$;

(5) $\frac{64}{3}\pi a^2$;　(6) $\pi a\left(2b+a\sinh\frac{2b}{a}\right)$.

52. (1) $\frac{32}{5}\pi a^2$;　(2) $2a(2-\sqrt{2})\pi$.　　**53.** $\frac{\pi}{2}$.

54. 质心坐标 $\left(0,\frac{2R}{\pi}\right)$, 转动惯量 $J_x=J_y=\frac{\pi}{2}R^3$.

55. 质心 $\left(0,0,\frac{3}{4}h\right)$, 转动惯量 $J_z=\frac{\pi}{10}h^5$.

56. $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$.　　**57.** $\frac{5}{12}\pi g$.

第 八 章

1. (1) $\ln 2$;　(2) $\frac{1}{|a|}$;　(3) $\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2}\ln 3$;

(4) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$;　(5) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\ (n\geqslant 2)$, $\frac{\pi}{2}\ (n=1)$.

2. (1) 发散.　(2) 收敛.

(3) 当 $p>1$ 时, 收敛; 当 $p\leqslant 1$ 时, 发散.

(4) 当 $q-p>1$ 时, 收敛; 当 $q-p\leqslant 1$ 时, 发散.　(5) 收敛.

(6) 当 $\alpha>1$ 时, 收敛; 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, 发散.　(7) 收敛.

3. (1) 收敛但不绝对收敛.

(2) 当 $\alpha>1$ 时, 绝对收敛; 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, 收敛但不绝对收敛.

(3) 当 $\alpha>1$ 时, 绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ 时, 收敛但不绝对收敛; 当 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 发散.

(4) 收敛但不绝对收敛.

4. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ 条件收敛, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

5. 直接从定义出发证之.

6. 变换后的积分区间不对.

7. 不一定, 例如取 $h(x)=1(x\in[0,1]), h(x)=\frac{1}{x^2}(x>1)$, 然后构造满足条件的单调连续函数 $f(x), g(x)$, 使得它们分别在许多区间为常数函数.

8. 利用积分变换以及狄利克雷判别法.

9. 利用狄利克雷判别法.

10. 用反证法并利用柯西准则.

11. 利用柯西准则.

12. 利用阿贝尔判别法.

13. 由于 $\int_0^{+\infty}f^+(x)\mathrm{d}x$ 发散, 从而 $\int_0^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}x$ 也发散.

14. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) π; (3) $\frac{3}{8}\pi$; (4) $(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$;

(5) -4; (6) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

15. (1) 发散. (2) 当 $\alpha<1$ 且 $\beta<1$ 时, 收敛; 否则发散.

(3) 收敛. (4) 收敛. (5) 收敛.

(6) 当 $p>-1$ 且 $q>-1$ 时, 收敛; 否则发散.

(7) 当 $\alpha>-1$ 时, 收敛; 否则发散.

16. (1) 当 $\alpha=0$ 时, 收敛; 当 $\alpha\neq 0, \beta<2$ 时, 收敛; $\beta\geqslant 2$ 发散.

(2) 注意到当 $\alpha<0$ 时, $x=1$ 为瑕点, 对任何 α 发散.

(3) 当 $\beta-\alpha<-1$ 时, 收敛; 否则发散.

(4) 收敛. (5) 当 $0<p<2$ 时, 收敛; 否则发散.

17. (1) 当 $p>-1, 1<q<2$ 时, 绝对收敛; 当 $-1<p<0, q=0$ 时, 条件收敛; 当 $p>-1, 0<q<1$ 时, 条件收敛. 其余情形发散.

(2) 当 $p>1$ 时, 条件收敛; 当 $p<-1$ 时, 绝对收敛.

(3) 绝对收敛.

(4) 当 $\beta \geqslant 0$ 时, 若 $\alpha > -2$ 且 $\beta > \alpha + 1$, 则绝对收敛; 若 $\alpha > -2$ 且 $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 1$, 则条件收敛.

当 $\beta < 0$ 时, 若 $\alpha - \beta > -2$ 且 $\alpha < -1$, 则绝对收敛; 若 $\alpha - \beta > -2$ 且 $-1 \leqslant \alpha < 0$, 则条件收敛.

19. 利用阿贝尔判别法.

20. 利用阿贝尔判别法.

21. 结论不一定成立, 如 $f(x) = \begin{cases} n^2, & x = \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

22. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 是单调函数, 所以 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 因此存在 $X > a$, 使得 $\left|\displaystyle\int_a^X f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_0^X |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$; 然后证明 $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^X f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0$.

23. (4) $\dfrac{\ln b^2 - \ln a^2}{2}$, $\ln b - \ln a$.

24. 根据 $g(x)$ 的连续性, 存在 $A > 0$ 及区间 $[a,b] \subset [0,T]$, 使得对于 $\forall x \in [a,b]$, 有 $|g(x)| \geqslant A$.

25. 不一定, 如 $f(x) = \begin{cases} n, & x \in \left(n - \dfrac{1}{n^3}, n + \dfrac{1}{n^3}\right), n \geqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

26. 利用瑕积分收敛的柯西准则.

第 九 章

1. (1) 收敛, $\dfrac{1}{2}$; (2) 收敛, 1; (3) 收敛, $\dfrac{3}{4}$; (4) 收敛, $\dfrac{2^x}{1-2^x}$;

(5) 发散; (6) 发散; (7) 发散; (8) 发散.

2. (1) 收敛. (2) 收敛. (3) 发散. (4) 发散.

(5) 收敛. (6) 发散. (7) 收敛. (8) 发散.

(9) 发散. (10) 收敛. (11) 当 $a = 1$ 时发散, 当 $a \neq 1$ 收敛.

(12) 当 $p < \dfrac{1}{2}$ 时, 收敛; 当 $p \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 发散.

(13) 当 $p<\frac{1}{2}$ 时, 收敛; 当 $p\geqslant\frac{1}{2}$ 时, 发散. (14) 收敛.

(15) 当 $\alpha>\mathrm{e}$ 时, 收敛; 当 $\alpha\leqslant\mathrm{e}$ 时, 发散. (16) 发散.

(17) 当 $p>2$ 时, 收敛; 当 $p\leqslant 2$ 时, 发散. (18) 收敛.

3. 利用柯西准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}a_k=0$, 再由 $\{a_n\}$ 的单调性推出结论.

4. 利用 $|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$.

5. 在题目的条件下有 $f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)(x\to 0)$.

6. 注意到 $\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$. 当 $\{a_n\}$ 单调时, 有

$$a_{n+1}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant a_n.$$

7. (1) 在题目的条件下有 $\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}}+\cdots+\frac{a_{N+k}}{S_{N+k}}>1-\frac{S_N}{S_{N+k}}$.

(2) $\frac{a_n}{S_n^2}\leqslant\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$.

(3) 当 $\{a_n\}$ 有界时, 存在 $M>0$, 使得 $\frac{a_n}{1+a_n}\geqslant\frac{a_n}{1+M}$;

当 $\{a_n\}$ 无界时, 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_n}{1+a_n}=1$.

(4) 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $0<\frac{a_n}{1+n^2a_n}<\frac{1}{n^2}$.

8. 在题目的条件下有 $\frac{a_{N+1}}{r_{N+1}}+\cdots+\frac{a_{N+k}}{r_{N+k}}>1-\frac{r_{N+k}}{r_{N+1}}$.

9. 对 $k=1,2,\cdots,n-1$, 我们有 $\frac{a_{k+1}}{a_k}\leqslant\frac{b_{k+1}}{b_k}$. 将这 $n-1$ 个不等式相乘.

10. (1) 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 收敛; 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 发散.

(2) 收敛. (3) 收敛. (4) 发散. (5) 收敛.

(6) 收敛. (7) 收敛. (8) 收敛.

11. (1) 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 发散; 当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时, 条件收敛; 当 $p>1$ 时, 绝对收敛.

(2) 当 $\alpha\leqslant -1$ 时, 发散; 当 $-1<\alpha<0$ 时, 条件收敛; 当 $\alpha\geqslant 0$ 时, 绝对收敛.

(3) 当 $p\leqslant 0$ 时, 发散; 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 条件收敛; 当 $p>1$ 时, 绝对收敛.

(4) 当 $\alpha\leqslant 0$ 时, 发散; 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 条件收敛; 当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时, 绝对收敛.

(5) 绝对收敛.

12. 不一定, 例如 $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

13. 必要性是显然的, 充分性的证明可以利用柯西收敛准则得到.

14. 例如 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right]$.

15. 不一定, 例如 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$.

16. 利用柯西收敛准则与阿贝尔变换.

17. 利用柯西收敛准则与阿贝尔变换.

18. 对有限和的相应不等式直接推出.

19. 利用有限和的赫尔德不等式.

20. 利用 19 题, 取 $p = 4, q = \dfrac{4}{3}$.

21. 考查 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 部分和之间的关系.

22. 先假定 $\{a_n\}$ 单调, 然后利用级数的重排.

23. 证明存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1 - \varepsilon_0$.

24. (1) 收敛.　(2) 收敛.　(3) 发散.　(4) 收敛.

(5) 当 $p > 1$ 时, 收敛; 当 $p \leqslant 1$ 时, 发散.　(6) 收敛.

(7) 收敛.　(8) 发散.

26. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + a_n\right) - 1$ 绝对收敛.

27. 例如 $a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k. \end{cases}$

第 十 章

1. (1) $(-\infty, -1) \bigcup \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$;　(2) $(-1, 1)$.

2. (1) 0, 一致收敛;　(2) 0, 不一致收敛;　(3) 0, 一致收敛;

(4) 0, 不一致收敛;　(5) 0, 不一致收敛;

(6) 0, (a) 一致收敛, (b) 不一致收敛;

(7) 0, 一致收敛; (8) 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时为 1, 否则为 0, 不一致收敛.

3. (1) 一致收敛. (2) 一致收敛. (3) 一致收敛. (4) 一致收敛.

(5) 当 $\alpha < 1$ 时, 一致收敛; 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 不一致收敛.

(6) 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 一致收敛; 当 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时, 不一致收敛.

4. 写出 $f_n(x)$ 的一般形式.

5. 在所给条件下, 存在 $M > 0$, 对于 $\forall X > 0$, 在区间 $[-X, X]$ 上, 有

$$|b_n \sin a_n x| \leqslant MX|a_n| \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

6. 利用一致收敛的定义.

7. 不妨设 $f(x) > 0 (x \in [a, b])$. 利用一致收敛的定义以及 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值大于零.

8. 利用一致收敛的定义.

9. 如 $f_n(x) = \frac{x}{n}$ $(x \in (0, +\infty))$, $g_n(x) = x^n (x \in (0, 1))$.

10. (1) 如 $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ $\quad x_n = \frac{1}{n}$.

(2) 利用定理 10.4.1 后面的注.

11. 用阿贝尔判别法证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

12. 利用有限覆盖定理.

13. (1) 证明等式右边的函数项级数在 $(0, +\infty)$ 内闭一致收敛;

(2) 证明等式右边的函数项级数在 $(-\infty, +\infty)$ 内闭一致收敛;

(3) 证明等式右边的函数项级数在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上一致收敛.

14. (1) $-\frac{1}{3}$; (2) $-\ln 2$.

15. 证明逐项求导后的级数在所给的区间内闭一致收敛.

16. $\mathrm{e} - 1$.

17. 首先我们知道 $f(x)$ 在任何闭区间上可积, 并且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\left|\int_{-\infty}^{-X} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_{X}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-X} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_{X}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

然后在 $[-X, X]$ 上应用定理 10.4.5′.

18. 估计 $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 的差.

19. $\alpha < 1$.

20. 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 及 $\forall x \in [a, b]$, 有 $|u_n(x)| \leqslant |u_n(a)| + |u_n(b)|$.

21. (1) 利用拉格朗日微分中值定理;

(2) 求出极限函数 $f(x)$ 并证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right] \neq 0$.

22. 求出极限函数, 然后在 $[0, 1]$ 上用狄尼定理.

23. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)[g(x) - g(0)]\mathrm{d}x = 0$.

24. 直接验证.

25. 例如 $f_n(x) = \sin\frac{x}{n^2}$.

26. 必要性是显然的. 充分性: 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 将 $[0, 1]$ 等分成有限个小区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得在每个区间上函数序列中的每个函数的振幅都小于 ε, 然后对于 $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, 利用

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x_i)|+|f_m(x_i)-f_m(x)|.$$

27. 证明该函数序列等度连续.

第十一章

1. (1) $r = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. (2) $r = 1$, 收敛域为 $(-1, 1)$.

(3) $r = 1$, 当 $\alpha \geqslant 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$; 当 $-1 \leqslant \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $[-1, 1)$; 当 $\alpha < -1$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$.

(4) $r = \frac{1}{2}$, 收敛域为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (5) $r = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(6) $r = \frac{1}{\mathrm{e}}$, 收敛域为 $\left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}, 2 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. (7) $r = 1$, 收敛域为 $[-1, 1)$.

(8) $r=1$, 收敛域为 $(-1,1)$.　(9) $r=+\infty$, 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(10) $r=1$, 收敛域为 $(-1,1)$.

2. (1) r^k;　(2) $\begin{cases} +\infty, & r>1, \\ 0, & r<1, \\ \text{无法确定}, & r=1; \end{cases}$　(3) $r^{\frac{1}{k}}$;　(4) 1.

3. (1) $\min\{r_a,r_b\}\leqslant r\leqslant +\infty$;　(2) $r_ar_b\leqslant r\leqslant +\infty$.

4. (1) $\dfrac{3-2x}{(x-1)^2}$;　(2) $\begin{cases} 0, & x=0, \\ \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{2x}, & x\neq 0; \end{cases}$

(3) $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$;　(4) $\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}$;

(5) $\begin{cases} 0, & x=0, \\ \dfrac{x+\ln(1+x)-x\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0; \end{cases}$

(6) $\dfrac{2x}{(x-1)^3}$;　(7) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$;　(8) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

5. (1) $\dfrac{\pi}{4}$;　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$;　(3) $\ln 2$;　(4) $\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

6. (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n!)}x^{2n}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\cos\alpha\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(\beta x)^{2n}}{(2n)!}-\sin\alpha\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(\beta x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{3+3^{2n}}{4}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,　$x\in(-1,1]$;

(7) $\arctan 2-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$,　$x\in(-1,1)$;

(8) $x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x\in[-1,1]$;

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x\in(-1,1)$;

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+(-1)^{[\frac{n}{2}]-1}(1+(-1)^n)}{n}x^n, \quad x\in(-1,1]$;

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}, \quad x\in(-1,1]$;

(12) $2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x\in[-1,1)$.

7. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$.

8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k}+(-1)^{n+1}2\ln 2\right]x^n+1-\ln 2$.

9. 将 $\frac{1}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 内展成幂级数, 逐项积分后取极限.

10. 利用泰勒展式的积分余项并注意到对于 $\forall n>1$, $f^n(x)$ 都是单调上升函数.

11. 将 $x-a=x_b+b-a$ 代入计算.

12. 对于 $\forall M>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\sum_{n=0}^{N}a_n>M$. 因此有

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\geqslant\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\geqslant M.$$

13. 对于 $f(x)$ 的每个零点 x_0, 将 $f(x)$ 在 x_0 处展成幂级数, 再证明存在邻域 $U_0(x_0,\delta)$, 使得 $f(x)$ 在该邻域中没有零点.

14. 证明 $f(x)$ 的麦克劳林级数的收敛半径为 ∞.

15. 利用魏尔斯特拉斯定理, 存在一列多项式 $\{P_n(x)\}$, 使得它在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 从而有 $0=\int_0^1 f(x)P_n(x)\mathrm{d}x\to\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x(n\to\infty)$.

17. 用反证法并利用柯西收敛准则推出矛盾.

18. 证明 $\lim_{x\to a+0}f(x)$ 与 $\lim_{x\to b-0}f(x)$ 存在.

第十二章

1. (1) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;

(2) $\frac{1}{2\pi\alpha}(\mathrm{e}^{\pi\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\alpha})+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{\alpha}{\pi(n^2+\alpha^2)}(\mathrm{e}^{\pi\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\alpha})\cos nx\right.$

$\left.+(-1)^{n+1}\frac{n}{\pi(n^2+\alpha^2)}(\mathrm{e}^{\pi\alpha}-\mathrm{e}^{-\pi\alpha})\sin nx\right]$;

(3) $-\frac{1}{2}\sin x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin nx$; (4) $\frac{1+\cos 2x}{2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; (6) $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$;

(7) $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2r^n\cos nx$; (8) $-\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

2. (1) $\sin x$; $\frac{2}{\pi}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cos 2nx}{(4n^2-1)\pi}$;

(2) $\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{8n}{4n^2-1}\sin 2nx$; $\cos x$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{-8}{(2n-1)^3\pi}\sin(2n-1)x$; $\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$;

(4) $\frac{1}{2}\sin x-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin 2nx$; $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$.

3. (1) $\frac{T}{2}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{T}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$; (2) $\frac{A}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2A}{(2n-1)\pi}\sin\left[\frac{(4n-2)\pi}{T}x\right]$.

4. $f'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$,

$f''(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-n^2a_n\cos nx-n^2b_n\sin nx)$.

7. $x\in[-\pi,\pi]$. (1) $\frac{\pi^2}{12}$; (2) $\frac{\pi^4}{90}$. **8.** (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\frac{\pi^2}{8}$.

9. 利用帕塞瓦尔等式及 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的傅里叶系数之间的关系.

11. 存在无穷多个以 2π 为周期的光滑函数在 $[-1,1]$ 上取零值.

12. (1) $\dfrac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{2\alpha}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\alpha}{n^2-\alpha^2}\cos nx\right]$, 和函数为 $\cos\alpha x$.

13. (1) 利用等式 $f(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}f(x+t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2h}\left[\int_0^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-h}f(t)\mathrm{d}t\right]$;

(2) 利用定积分第一中值定理与 $f(x)$ 的一致连续性;

(3) 利用 $F(x)$ 的傅里叶级数一致收敛到 $F(x)$.

14. 证明等价命题: $f(x)$ 的傅里叶系数全为 0 的充分必要条件是 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=0$, 并证明 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=0$ 的充分必要条件是 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0$. 最后利用帕塞瓦尔等式.

15. $f(x)\sim 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$, $\quad g(x)\sim\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$,

$h(x)\sim 2\pi^2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}+12\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n^3}$.



名词索引